Phénomène de pincement de l'écoulement secondaire entre deux sphères contrarotatives

Fatima Bencherioua, Meriem Khemici, Toufik Boufendi et Mohamed Afrid

Laboratoire de Physique Energétique, Département de Physique, Faculté des Sciences Exactes, Université des frères Mentouri, Route d'Aïn El-Bey Constantine 25000, Algérie.

Accepté le 05/11/2008

ملخص

تهتم هذه الدراسة الرقمية بتطور تيار كوات الكروي بين كرتين متعاكستي الدوران بتزايد عدد رينولدس. هدف الدراسة هو تحديد ظهور و تطور ظاهرة قرص التيار الثانوي في المستوى الطولي بتزايد عدد رينولدس. يعبر عن التيار بمعادلات نافيي- سطوكس مع شروط مناسبة، إبتدائية و عند النهايات. معادلات النموذج الرياضي تظهر ثلاثة عوامل مراقبة: نسبة سمك الفجوة الكروية (يساوي 0,5)، عدد روسبي (يساوي 0,5-)، عدد رينولدس المغير بين 100 و500. تحلل المعادلات النموذجية بطريقة الأحجام المنتهية. بعدد رينولدس الإبتدائي، يكون التيار الثانوي في المستوى الطولي على شكل خليتي إكمان ، في كل نصف كرة. بزيادة عدد رينولدس تتشوه الخليتين الملاصقتين للكرة الداخلية بظاهرة القرص قرب الإستواء. يظهر القرص ضعيفا عند عدد رينولدس 200 ويشتد القرص بزيادة عدد رينولدس بين 200 و500.

الكلمات المفتاحية: الدوران المتعاكس؛ كريات؛ قرص؛ سيلان؛ محاكاة؛ دراسة رقمية.

Résumé

Cette étude numérique concerne l'évolution de l'écoulement de Couette sphérique, entre deux sphères contrarotatives, avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Le but de l'étude est la détermination de l'apparition et de l'évolution du phénomène de pincement de l'écoulement secondaire dans le plan méridien avec l'augmentation du nombre de Reynolds. L'écoulement est modélisé par les équations de Navier-Stokes, avec des conditions initiales et aux limites appropriées. La forme adimensionnelle du modèle fait apparaître trois paramètres de contrôle: le rapport d'aspect et le nombre de Rossby, arbitrairement fixés à 0.5 et -0.5, respectivement, et le nombre de Reynolds est varié entre 100 et 500. Les équations modélisantes sont résolues avec la méthode des volumes finis. Pour le nombre de Reynolds initial, l'écoulement secondaire, dans le plan méridien, se manifeste sous la forme de deux cellules d'Eckman dans chaque hémisphère. Avec l'augmentation du nombre de Reynolds, les deux cellules près de la sphère intérieure sont déformées par un phénomène de pincement prés de l'équateur. Le pincement apparaît faiblement avec le nombre de Reynolds 200; mais se resserre continuellement avec l'augmentation du nombre de Reynolds entre 200 et 500.

Mots clés : *contrarotative; sphères; pincement; écoulement; simulation; numérique.*

Abstract

This numerical study concerns the evolution of the spherical Couette flow between two counter-rotating spheres with the increase of the Reynolds number. The purpose of the study is the determination of the appearance and the evolution of the pinching phenomenon of the secondary flow in the meridian plane with the increase of the Reynolds number. The flow is modeled by the Navier-Stokes equations, with appropriate initial and boundary conditions. The non dimensional form of the model shows three control parameters: the aspect ratio and the Rossby numbers arbitrarily set equal to 0.5 and -0.5, respectively, and the Reynolds number is varied between 100 and 500. The model equations are solved with the finite volume method. For the initial Reynolds number, the secondary flow in the meridian plane is manifested in the form of two Eckman cells in each hemisphere. With the increase of the Reynolds number, the two cells near the inner sphere are deformed by a pinch phenomenon near the equator. The pinch appears weakly with the low Reynolds number 200; but tightens continuously with the increase of the Reynolds number between 200 and 500.

Key words: *counter-rotating; spheres; pinched; flow; simulation; numerical.*

Auteur correspondant: afrid.mohamed@gmail.com (Mohamed Afrid)

1. INTRODUCTION

Les écoulements sphériques présentent un intérêt certain de part leur existence dans diverses applications d'engineering tels les fluides gyroscopes et les centrifugeuses ainsi que dans les domaines de la géophysique et de l'astrophysique avec les mouvements océaniques et atmosphériques des planètes. Ces écoulements sont influencés par les forces centrifuges, les forces de pression et les forces visqueuses. Ils associent une rotation autour d'un axe (écoulement primaire) et une circulation dans le plan méridional (écoulement secondaire), générées suite au déséquilibre de ces forces. Plusieurs configurations sont possibles pour la rotation des sphères dont les plus fréquentes sont le cas rotor-stator où seule une des deux sphères est en mouvement, la corotation où les deux sphères tournent dans le même sens, et enfin la contrarotation lorsque les deux sphères tournent dans des sens opposés. En dépit de la multitude des travaux effectués dans ce domaine, il reste que, comme le précisent M. Junk et C. Egbers [1], peu d'investigations ont concerné le cas des deux sphères tournant indépendamment. Dans un ordre chronologique, les études théoriques, faites par I. Proudman [2] et K. Stewartson [3] se basent sur la méthode des perturbations singulières qui consiste à établir un raccordement des solutions interne de couche limite et externe déduite de la théorie potentielle, appliquée aux nombres de Reynolds très élevés ($Re \to \infty$). Pour une solution au premier ordre, l'écoulement est divisé en deux zones, par un cylindre fictif situé entre les deux sphères solides dont les génératrices sont parallèles à l'axe de rotation et tangent à la sphère intérieure. Dans la zone extérieure au cylindre, le fluide est en rotation en bloc à la vitesse de la sphère extérieure tandis que dans la zone intérieure l'écoulement circule dans un plan méridional selon des couches dites de Stewartson quasi parallèles à l'axe de rotation entre les couches d'Eckman situées sur les deux sphères. Le sens de cette circulation est fixé par le signe du nombre de Rossby. Ensuite, analytiquement, B. Munson et D. Joseph [4] résolvent les équations de Navier-Stokes écrites en termes de fonction de courant et de vorticité en utilisant la solution de perturbation à ordre élevé du nombre de Reynolds (Re^7) applicable aux faibles nombres de Re. Ils trouvent que pour un nombre de Rossby fixé, égal à -1, l'écoulement est influencé par le nombre de Reynolds. A $Re = 100$, l'écoulement est dominé par le mouvement de la sphère extérieure et est constitué d'une cellule orientée dans le sens horaire. En augmentant le nombre de Reynolds à 500 l'influence de la sphère intérieure devient apparente par la création d'une cellule, de petite dimension, évoluant dans le sens antihoraire et située dans la région polaire près de la sphère intérieure. La tendance vers la formation du cylindre fictif est distinguée avec la représentation des contours de la vitesse angulaire. Par contre, lorsque le nombre de Rossby est fixé à -0.5, les auteurs trouvent qu'aucune des deux sphères ne domine le mouvement et que l'écoulement pour les nombres de Reynolds considérés est formé de deux cellules contrarotatives occupant tout l'espace annulaire sphérique. La tendance vers la formation du cylindre fictif est aussi apparente lorsque le Reynolds passe de 100 à 500. Les auteurs présentent aussi les torques en fonction du nombre de Reynolds. Dans une deuxième partie de leurs travaux, les auteurs B. Munson et D. Joseph [5] étudient la stabilité hydrodynamique de l'écoulement. En appliquant la théorie de l'énergie de la stabilité hydrodynamique, les auteurs calculent le nombre de Reynolds critique pour différents entrefers et différentes vitesses angulaires. Quant à J. Bonnet et T. de Roquefort [6], ils réservent une partie de leur étude numérique aux très faibles nombres de Ro. Pour des valeurs de $RoRe^{1/3} \leq 10^{-2}$ avec Re=3000, ils obtiennent une structure de l'écoulement proche de celle prévue par la théorie linéarisée de Proudman. Cependant pour Re=1000 ils observent au voisinage de l'équateur une zone assez étendue en rotation à la vitesse de la sphère extérieure. L'étude expérimentale de M. Wimmer [7] se base sur des observations de l'écoulement et établit des diagrammes de stabilité pour deux valeurs de l'entrefer β=0.00256 (faible) et 0.11 (large). La contra rotation peut générer deux cellules contrarotatives de part et d'autre d'un rayon nodal où la vitesse circonférentielle est nulle et dont la position dépend des valeurs des vitesses angulaires des deux sphères. En étudiant les phénomènes liés aux mouvements atmosphériques des planètes, I. Yavorskaya et Y. Belyaev [8] présentent une courbe de stabilité et d'existence des différents régimes d'écoulement pour une épaisseur égale à 0.11. En identifiant les types d'instabilités centrifuges, ils mettent en évidence les phénomènes d'hystérésis et de non-unicité des régimes. Récemment B. Pal'tsev, A. Stavtsev et I. Chechel [9] présentent des solutions numériques pour de larges intervalles de l'entrefer, entre 0.1 et 100. Une classification des régimes de rotation est proposée en fonction de la structure du niveau de la fonction de courant ainsi que des trajectoires de particules fluides.

Dans cette étude nous nous intéressons à l'effet du nombre de Reynolds sur l'écoulement sphérique dans un entrefer relativement large et un nombre de Rossby négatif relativement modéré. L'intérêt de cette investigation théorique, spécifique, se situe dans une meilleure compréhension des mouvements des fluides en rotation, qui sont quasi présents dans les écoulements atmosphériques et océaniques. L'augmentation du nombre de Reynolds ouvre aussi la voie vers la transition aux instabilités hydrodynamiques transitoires et non axisymétriques. A travers les résultats obtenus une explication physique du phénomène de pincement sera donnée.

2. MODÉLISATION MATHÉMATIQUE

La géométrie du problème est illustrée dans la figure 1. Le rayon de la sphère intérieure est R_1, celui de la sphère extérieure est R_2. La vitesse angulaire de la sphère intérieure est Ω_1, celle de la sphère extérieure est Ω_2. Les équations modélisantes non dimensionnelles sont écrites dans les coordonnées sphériques. La longueur caractéristique est le rayon de la sphère intérieure R_1, et la vitesse caractéristique est $\Omega_1 R_1$.

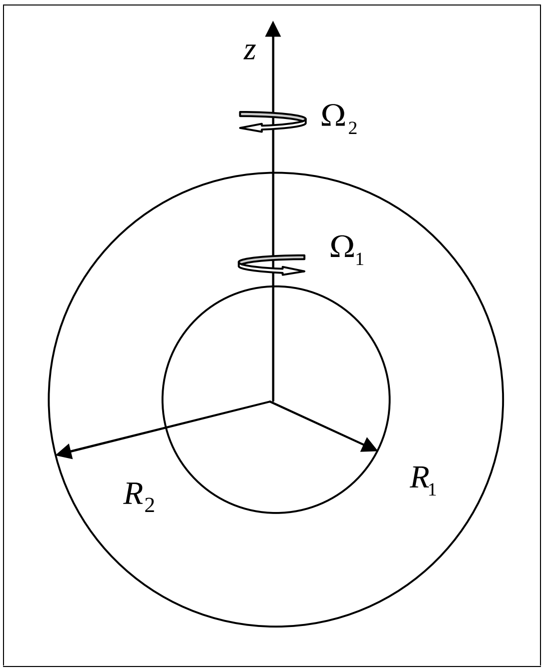


***Figure 1**. Schéma des sphères concentriques contrarotatives autour de l'axe z.*

La condition initiale (au temps $t = 0$) du premier nombre de Reynolds (100) est la suivante:

à $t = 0$, $U = V = W = 0$ *(1)*

Avec chaque augmentation du nombre de Reynolds, l'écoulement du nombre de Reynolds précédent est utilisé comme condition initiale. Cette initialisation minimise le temps de calcul.

Pour $t > 0$,

Equation de la continuité

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 U\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(V\sin\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(W\right)=0 \qquad (2)$$

Equation de la quantité de mouvement radiale

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 U U\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(U V\sin\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(U W\right)-\frac{V^2}{r}-\frac{W^2}{r}$$

$$=-\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\\ \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)+\\ \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\phi^2}-\frac{2U}{r^2}\\ -\frac{2}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(V\sin\theta\right)\\ -\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial W}{\partial\phi}\end{array}\right] \qquad (3)$$

Equation de la quantité de mouvement polaire

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 U V\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(V V\sin\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(V W\right)+\frac{U V}{r}-\frac{W^2\cot\theta}{r}$$

$$=-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial\theta}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)\\ +\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)\\ +\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}\\ -\frac{V}{r^2\sin^2\theta}+\frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}\\ -\frac{2\cot\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial W}{\partial\phi}\end{array}\right] \qquad (4)$$

Equation de la quantité de mouvement azimutale

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 U W\right)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(V W\sin\theta\right)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(W W\right)}{\partial\phi}+\frac{U W}{r}+\frac{W V\cot\theta}{r}$$

$$=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial\phi}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2\partial W}{\partial r}\right)\\ +\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sin\theta\,\partial W}{\partial\theta}\right)\\ +\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 W}{\partial\phi^2}\\ +\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\phi}+\\ \frac{2\cot\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\phi}-\frac{W}{r^2\sin^2\theta}\end{array}\right] \qquad (5)$$

Les conditions aux limites sont:

A $r=1,\ U=V=0,\ W=\sin\theta$ (6)

A $r=1.5,\ U=V=0,\ W=-0.75\sin\theta$ (7)

A $\theta=0,\ \frac{\partial U}{\partial\theta}=V=\frac{\partial W}{\partial\theta}=0$ (8)

A $\theta=\pi,\ \frac{\partial U}{\partial\theta}=V=\frac{\partial W}{\partial\theta}=0$ (9)

Notons que dans les équations (8) et (9) la condition $\frac{\partial W}{\partial\theta}=0$ peut être remplacée par $W=0$, parce que nous avons trouvé qu'aux pôles ($\theta=0$ et $\theta=\pi$) $W=0$ et $\frac{\partial W}{\partial\theta}=0$.

Suivant la direction azimutale φ, on a la condition de périodicité lorsque φ est augmentée de $\varphi=0$ à $\varphi=2\pi$.

Les paramètres de contrôle de l'écoulement sont le rapport d'aspect $=(R_2-R_1)/R_1$, arbitrairement fixé égal à 0.5; le nombre de Rossby $Ro=\Omega_2/\Omega_1$, arbitrairement fixé égal à -0.5 et le nombre de Reynolds $\mathrm{Re}_1=R_1^2\,\Omega_1/\nu$, variable entre 100 et 500.

La vorticité est une propriété cinématique locale de l'écoulement qui mesure la rotation locale des particules fluides dans l'écoulement considéré. Mathématiquement, elle est définie par le rotationnel du vecteur vitesse.

$$\vec{\omega}=\nabla\times\vec{V} \quad (10)$$

Le vecteur de vorticité $\vec{\omega}$ a trois composantes: une composante radiale ω_r, une composante polaire ω_θ et une composante azimutale ω_φ:

$$\vec{\omega}=\omega_r\,\vec{e}_r+\omega_\theta\,\vec{e}_\theta+\omega_\varphi\,\vec{e}_\varphi \quad (11)$$

Les composantes s'écrivent dans les coordonnées sphériques comme suit:

$$\begin{aligned}
\omega_r &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(W\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\\
\omega_\theta &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial(rW)}{\partial r}\\
\omega_\varphi &= \frac{1}{r}\frac{\partial(rV)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}
\end{aligned} \quad (12)$$

La distribution de la vorticité fournit un autre moyen d'analyse de l'écoulement et d'explication de certains aspects physiques de la dynamique des fluides. Dans notre présente étude, la distribution de la composante azimutale de la vorticité nous aide à expliquer l'apparition du phénomène de pincement de l'écoulement secondaire dans le plan méridien. L'équation de transfert de la vorticité est obtenue en appliquant l'opérateur rotationnel à l'équation de conservation de la quantité de mouvement de l'écoulement. Cette équation vectorielle est donc déduite des équations de Navier-Stokes pour la vitesse. Ci-dessous on présente, la forme vectorielle, de l'équation de transport de la vorticité.

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}+\left(\vec{V}\bullet\nabla\vec{\omega}\right)=\left(\vec{\omega}\bullet\nabla\vec{V}\right)+\frac{1}{Re}\nabla^2\vec{\omega} \quad (13)$$

Le premier terme de l'équation (13) est le terme de variation temporelle locale de la vorticité. Le deuxième terme représente l'ensemble des termes convectifs. Le premier terme à droite représente les termes liés aux taux de déformation des lignes de vorticité. Le dernier terme à droite représente l'ensemble des termes de la diffusion de la vorticité par l'effet visqueux.

Considérons l'équation de transfert de la composante azimutale de la vorticité, exprimée dans un système en coordonnées sphériques.

$$\frac{\partial \mu_\varphi}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 U \mu_\varphi\right)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta\, V\mu_\varphi\right)}{\partial\theta}$$

$$+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(W\mu_\varphi\right)}{\partial\varphi}+\frac{W\mu_r}{r}+$$

$$+\frac{W\cot\theta\,\mu_\theta}{r}$$

$$=\mu_r\frac{\partial W}{\partial r}+\mu_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\theta}$$

$$+\mu_\varphi\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial W}{\partial\varphi}+\frac{U}{r}+\frac{V\cot\theta}{r}\right]$$

$$+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\mu_\varphi}{\partial r}\right)\\ +\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta\,\mu_\varphi\right)}{\partial\theta}\right)\\ +\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\mu_\varphi}{\partial\varphi^2}+\\ \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\mu_r}{\partial\varphi}+\frac{2\cot\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\mu_\theta}{\partial\varphi}\\ -\frac{\mu_\varphi}{r^2\sin^2\theta}\end{array}\right] \quad (14)$$

Dans notre étude, il est trouvé que l'écoulement est permanent et axisymétrique, l'équation de la composante azimutale de l'équation de la vorticité se réduit à:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 U\mu_\varphi\right)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta\, V\mu_\varphi\right)}{\partial\theta}$$

$$+\frac{W\mu_r}{r}+\frac{W\mu_\theta\cot(\theta)}{r}$$

$$=\mu_r\frac{\partial W}{\partial r}+\mu_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\theta}+\mu_\varphi\left[\frac{U}{r}+\frac{V\cot\theta}{r}\right]+$$

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\mu_\varphi}{\partial r}\right)\\ +\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta\,\mu_\varphi\right)}{\partial\theta}\right)\\ -\frac{\mu_\varphi}{r^2\sin^2\theta}\end{array}\right] \quad (15)$$

$$\mu_r=\frac{1}{r\,sin\theta}\frac{\partial\left(W\,sin\theta\right)}{\partial\theta}$$
$$\mu_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rW\right)}{\partial r} \quad (16)$$
$$\mu_\varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rV\right)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 U\mu_\varphi\right)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta\, V\mu_\varphi\right)}{\partial\theta}+\frac{W\mu_r}{r}+\frac{W\mu_\theta\cot(\theta)}{r}$$ est la somme des termes convectifs.

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\mu_\varphi}{\partial r}\right)\\ +\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta\,\mu_\varphi\right)}{\partial\theta}\right)-\frac{\mu_\varphi}{r^2\sin^2\theta}\end{array}\right]$$

est la somme des termes de diffusion visqueuse de la vorticité azimutale.

$$\mu_r\frac{\partial W}{\partial r}+\mu_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\theta}+\mu_\varphi\left[\frac{U}{r}+\frac{V\,cot\theta}{r}\right]$$ est la somme des termes d'extension et d'étirement des lignes de vorticité (*streching and straining of vortex lines*). Ces termes représentent des sources

(positives ou négatives) de la vorticité. Le premier et le deuxième terme, représentent la production (ou la destruction) de la vorticité par les déviations des lignes de vorticité par les déformations angulaires correspondantes. Quant au troisième terme, il représente la production (ou la destruction) de la vorticité par l'extension (*streching*) des lignes de vorticité par le taux d'extension.

Dans notre étude, la résolution numérique de l'équation de transport de la vorticité azimutale n'est pas nécessaire. Une fois le champ de vitesse obtenu, on calcule la vorticité azimutale directement de l'équation (12) ou (16).

La vorticité azimutale est liée à la distribution de la fonction de courant de l'écoulement secondaire dans le plan méridien. On définit la fonction de courant · de l'écoulement secondaire comme suit:

$$U = \frac{1}{r^2 \sin^{-}} \frac{\partial \cdot}{\partial^{-}}$$

$$V = \frac{-1}{r \sin^{-}} \frac{\partial \cdot}{\partial r} \tag{17}$$

On peut montrer que la vorticité azimutale est liée à l'équation de transfert de la fonction de courant [10]:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cdot}{r \sin^{-}}\right)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial^{-}}\left(\frac{1}{\sin^{-}}\frac{\partial}{\partial^{-}}\left(\frac{\cdot}{r}\right)\right) + \mu_{¤} = 0 \tag{18}$$

La vorticité azimutale est une source de l'équation de transfert de la fonction de courant. A un point donné de l'écoulement, l'augmentation de la vorticité azimutale augmente la valeur relative de la fonction de courant.

3. METHODE NUMÉRIQUE DE RÉSOLUTION

Les équations modélisantes et leurs conditions initiales et aux limites sont résolues avec la méthode numérique des volumes finis. On utilise un maillage numérique avec 32 points suivant la direction radiale, 189 points suivant l'angle polaire et 32 points suivant la direction azimutale. Le maillage est uniforme suivant chaque direction. Une discrétisation spatiotemporelle d'ordre deux est utilisée. La solution séquentielle des équations de discrétisation des variables dépendantes suit l'algorithme classique SIMPLER [11]. Le système d'équations algébriques linéaires (de discrétisation) de chaque variable dépendante est résolu avec la méthode itérative de balayage, utilisant l'algorithme TDMA suivant les directions radiale et polaire et l'algorithme TDMA cyclique suivant la direction azimutale. Tous les cas sont résolus avec un pas de temps égal à 10^{-3}. Le premier cas, avec le nombre de Reynolds égal à 100 est résolu avec des conditions initiales statiques. Avec chaque variation du nombre de Reynolds, la solution est obtenue avec celle du nombre de Reynolds précédent, comme état initial. A partir de l'état initial, la marche dans le temps est continuée jusqu'à l'obtention d'un régime établi. Pour les cas considérés dans cette étude, les régimes établis sont stationnaires et axisymétriques. L'état stationnaire est caractérisé par une évolution temporelle nulle de l'écoulement et l'équilibre des torques des deux sphères. L'état axisymétrique est caractérisé par une invariance azimutale. Tous les résultats ont été obtenus sur un PC Intel Pentium, 2.7 GHz et 500Mo RAM. A titre d'exemple, avec un maillage de 32x189x32 points et un pas de temps égal à 10^{-3}, le cas $\mathrm{Re} = 100$ a consommé 240 heures de temps de calcul. Mais, le cas $\mathrm{Re} = 500$, avec le même maillage, et un pas de temps égal à $5 10^{-4}$ a nécessité 4320 heures d'exécution du code de calcul.

4. RESULTATS

L'écoulement de Couette sphérique contrarotatif, pour de faibles nombres de Reynolds, est stationnaire et axisymétrique.

L'écoulement est entraîné par les contra rotations des deux sphères. L'écoulement secondaire, dans le plan méridien, est infinitésimal (et donc négligeable); l'écoulement principal est approximativement représenté par la distribution méridionale de la vitesse azimutale. Cette distribution peut être obtenue par la solution de l'équation de la quantité de mouvement azimutale simplifiée:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2\,\partial W}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sin\theta\,\partial W}{\partial\theta}\right)-\frac{W}{r^2\sin\theta}=0 \quad (19)$$

Avec les conditions aux limites:

$$r=1;\quad W=\sin\theta \quad (20)$$

$$r=1.5;\ W=-0.75\ \sin\theta \quad (21)$$

$$\theta=0;\ W=0 \quad (22)$$

$$\theta=\pi;\ W=0 \quad (23)$$

La solution, obtenue avec la méthode de séparation des variables [12], est:

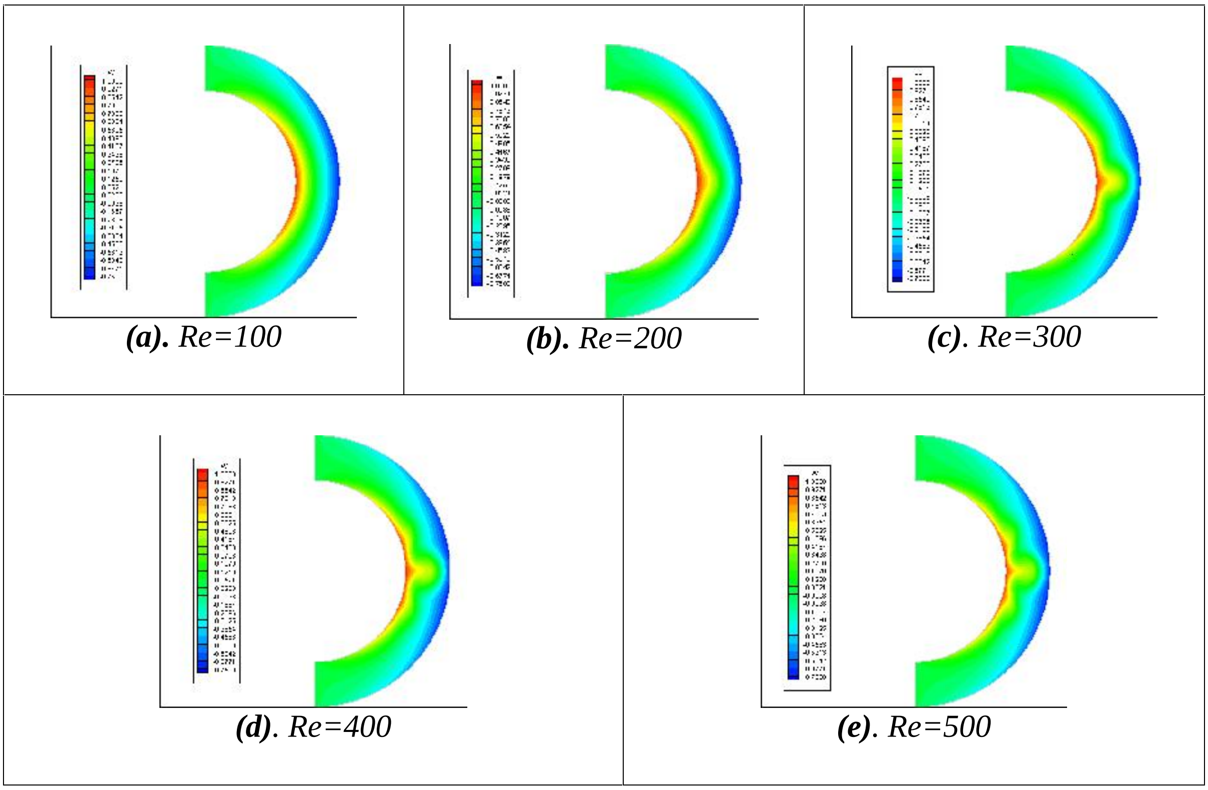
$$W(r,\theta)=\left(-\frac{43}{38}+\frac{81}{38}\frac{1}{r^3}\right)r\sin\theta \quad (24)$$

Cette distribution est caractérisée par une distribution polaire sinusoïdale (proportionnelle à $\sin\theta$): le niveau de la vitesse est nul aux pôles et augmente (en valeur absolue) en allant vers l'équateur. Suivant la direction radiale, le plan méridien se divise en deux parties: l'une avec des vitesses positives (comme celle de la sphère intérieure), l'autre avec des vitesses négatives (comme celle de la sphère extérieure). Ces deux zones sont nécessairement séparées par une surface à vitesse azimutale nulle appelée surface nodale. La surface nodale (où $W=0$) est une sphère de rayon $r\approx 1.235$. Cette surface n'inclue pas l'axe de rotation ($\theta=0$ et $\theta=\pi$) où on aussi $W=0$ comme limite.

La solution de l'équation (15) nous montre que la vitesse angulaire de rotation (égale à W divisée par le rayon cylindrique $r\sin\theta$) est purement radiale. Cependant, la solution (15) n'est valable que pour les très faibles nombres de Reynolds ($\mathrm{Re}\to 0$). Pour les nombres de Reynolds (considérés dans cette étude), l'écoulement de Couette sphérique contrarotatif est tri directionnel (avec trois composantes de vitesse); mais il est stationnaire (il atteint un état permanent) et axisymétrique (invariant suivant la direction azimutale). Il est représenté par un écoulement principal et un écoulement secondaire.

L'écoulement principal est illustré par la distribution méridionale de la vitesse azimutale, représentée dans les figures 2a-2e, pour les nombres de Reynolds considérés dans cette étude. Pour le nombre de Reynolds le plus faible, la distribution est quasi radiale sphérique. Avec l'augmentation du nombre de Reynolds, la distribution est déformée par des protubérances, près de l'équateur, dues à l'écoulement secondaire.

Le couplage des trois équations de Navier-Stokes prédit qu'une distribution méridionale de la vitesse azimutale induit un écoulement secondaire considérable dans le plan méridien, pour des nombres de Reynolds qui ne sont pas très faibles.



***(a)**. Re=100* ***(b)**. Re=200* ***(c)**. Re=300*

***(d)**. Re=400* ***(e)**. Re=500*

***Figure 2.** Distribution méridionale de la vitesse azimutale*

L'écoulement secondaire est déterminé par l'équilibre des forces centrifuges, les forces de pression et les forces visqueuses.

Pour le premier nombre de Reynolds considéré ($\mathrm{Re} = 100$), l'écoulement secondaire se manifeste sous la forme de deux cellules (d'Eckman) contrarotatives dans chaque hémisphère de l'entrefer sphérique.

Dans chaque hémisphère, une cellule est collée à chaque sphère (voir les figures 3a-3e).

Avec l'augmentation du nombre de Reynolds, la forme des cellules de l'écoulement secondaire change: les cellules accolées à la sphère intérieure subissent un pincement à une certaine distance de l'équateur. Le pincement est plus fort avec l'augmentation du nombre de Reynolds. L'écoulement secondaire induit par l'écoulement principal (la rotation suivant la direction azimutale) affecte la distribution de ce dernier comme l'exige le couplage des composantes des vitesse dans les équations modélisantes.

Dans ce qui suit, nous présentons une interprétation physique de l'apparition du phénomène de pincement. Dans notre étude, la fonction de courant est calculée avec la définition $V = \frac{-1}{r \sin\theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}$ et avec la valeur arbitraire $\psi = 0$ à la paroi de la sphère intérieure.

Si on examine la distribution de la fonction de courant de la cellule, prés de la sphère intérieure, dans l'hémisphère sud, on constate que les valeurs de la fonction de courant, sont positives ou nulles (la cellule tourne dans le sens horaire). A la limite extérieure de la cellule la fonction de courant est nulle, et elle augmente en allant à l'intérieure de la cellule. Pour le nombre de Reynolds le plus faible (100), le maximum (local) de la vorticité azimutale se trouve au milieu du noyau de la cellule où se localise le

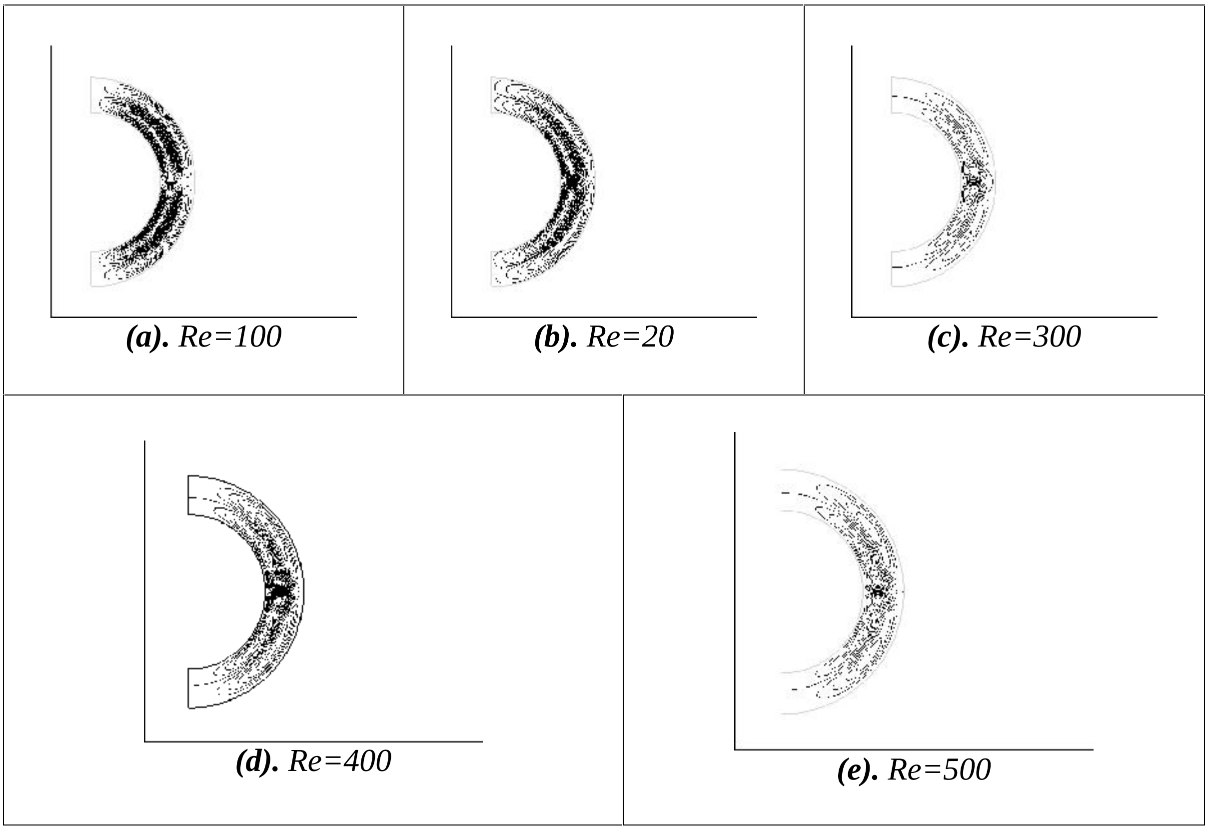
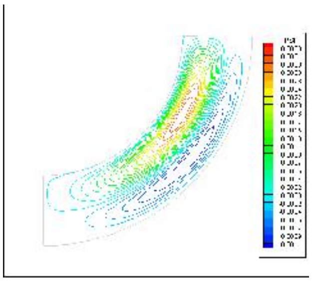
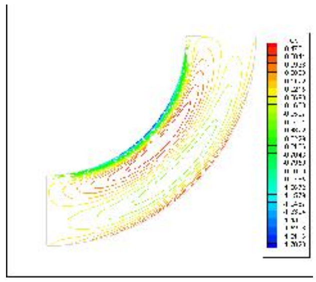


Figure 3. *Ecoulement secondaire.*

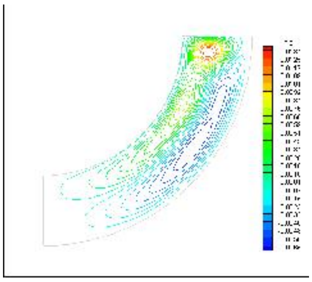
maximum de la fonction de courant comme prévu. En s'éloignant du noyau, suivant la direction polaire (vers le pôle sud ou vers l'équateur) la vorticité azimutale diminue; cette distribution de la vorticité n'induit pas un phénomène de pincement de la cellule de l'écoulement secondaire (voir les figures 4.a et 4.b). Cependant, avec l'augmentation du nombre de Reynolds, à l'intérieur de la même cellule de l'écoulement secondaire (accolée à la sphère intérieure, dans l'hémisphère sud), les effets d'étirement des lignes de la vorticité augmentent la vorticité azimutale prés de l'équateur. Toujours à l'intérieur de la même cellule, en s'éloignant de l'équateur vers le pôle sud, la vorticité diminue puis augmente. Cette variation polaire de la vorticité azimutale diminue le niveau de la fonction de courant (dans la zone de diminution de la vorticité) et le rapproche de celui de la fonction de courant à la limite de la cellule et ceci crée le phénomène de pincement de la cellule de l'écoulement secondaire (voir les figures 4.c et 4.d). Un raisonnement similaire peut être fait pour expliquer l'induction du pincement de la cellule, de l'écoulement secondaire, accolée à la sphère intérieure, dans l'hémisphère nord; mais avec l'inversement des signes de la fonction de courant et de la vorticité.



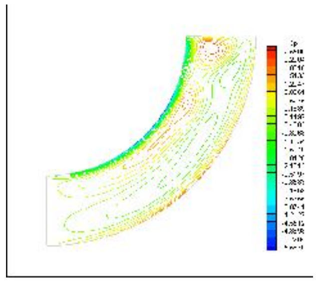
***(a).** Re=100*



***(b).** Re=100*



***(c).** Re=400*



***(d).** Re=400*

Figure 4. Fonction de courant de l'écoulement secondaire dans l'hémisp*hère sud*

Dans ce qui suit, on donne une interprétation énergétique de l'écoulement entre deux sphère contrarotatives. A l'état stationnaire, l'écoulement a besoin d'une certaine énergie cinétique pour entretenir son mouvement. Une partie de l'énergie de l'écoulement est transformée en chaleur par la dissipation visqueuse (effet des frottements visqueux dans l'écoulement). Cette énergie dissipée doit être compensée par l'énergie transférée par les sphères rotatives au fluide.

L'énergie nécessaire à la rotation des deux sphères est obtenue par des moteurs extérieurs. On peut quantifier la puissance nécessaire à la rotation de chaque sphère par le produit scalaire du vecteur du torque axial (moment axial de la force de cisaillement à la paroi de la sphère) et du vecteur de la vitesse angulaire de la sphère. Les vecteurs des vitesses angulaires des rotations des sphères sont connues $(\Omega_1\vec{e}_z \text{ et } \Omega_2\vec{e}_z)$. Le vecteur du moment de la force de cisaillement à la surface de la sphère intérieure est définit par:

$$\vec{T}_{r=R_1} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} [r\sin\theta]\vec{e}_\rho \wedge \left[-\mu \left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{W}{r}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\; \vec{e}_\varphi \right]$$

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left[\mu \left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{W}{r}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) r^3\sin^2\theta\, d\theta\, d\varphi \right] \vec{e}_z \tag{25}$$

Le vecteur du moment de la force de cisaillement à la surface de la sphère extérieure est définit par:

$$\vec{T}_{r=R_2}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}[r\sin\theta]\vec{e}_\varphi \wedge \left[\mu\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{W}{r}\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\right]\vec{e}_\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\mu\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{W}{r}\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)r^3\sin^2\theta\, d\theta\, d\varphi\right]\vec{e}_z \tag{26}$$

Dans l'équation précédente, on définit l'élément différentiel de la surface sphérique par $r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$, le rayon cylindrique par $r\sin\theta$ et la contrainte de cisaillement pariétale par :

$$\tau_{r\varphi}=\tau_{\varphi r}=\mu\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{W}{r}\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right).$$

Compte tenu de l'axisymétrie de l'écoulement, cette contrainte devient :

$$\tau_{r\varphi}=\tau_{\varphi r}=\mu\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{W}{r}\right)\right).$$

La puissance nécessaire pour la rotation de la sphère intérieure est:

$$Q=-\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\mu\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{W}{r}\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)r^3\sin^2\theta\, d\theta\, d\varphi\right]_{r=R_1}\vec{e}_z\bullet\Omega_1\vec{e}_z$$

$$=-\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Omega_1\left[\mu\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{W}{r}\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)r^3\sin^2\theta\, d\theta\, d\varphi\right]_{r=R_1} \tag{27}$$

La puissance nécessaire pour la rotation de la sphère extérieure est:

$$Q=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\mu\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{W}{r}\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)r^3\sin^2\theta\, d\theta\, d\varphi\right]_{r=R_2}\vec{e}_z\bullet\Omega_2\vec{e}_z$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Omega_2\left[\mu\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{W}{r}\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)r^3\sin^2\theta\, d\theta\, d\varphi\right]_{r=R_2} \tag{28}$$

D'après le théorème du moment cinétique, on peut montrer qu'en régime stationnaire, les modules des torques des forces de cisaillement aux deux surfaces sphérique sont égaux. Cette égalité est représentative de l'atteinte du régime permanent. Considérons le moment cinétique axial du fluide (ayant une masse volumique ρ) de l'entrefer sphérique en rotation (autour de l'axe vertical z):

$$L\vec{e}_z=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{R_1}^{R_2}[r\sin\theta]\vec{e}_\varphi\wedge\left[\rho\, r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi\; W(r,\theta,\varphi,t)\right]\vec{e}_\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{R_1}^{R_2}\left[\rho\, r^3\sin^2\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi\; W(r,\theta,\varphi,t)\right]\vec{e}_z \tag{29}$$

Le théorème du moment cinétique s'énonce comme suit:

Le taux de variation temporelle du moment cinétique axial est égal à la somme des moments axiaux (torques suivant la direction axiale) des forces extérieures appliquées aux fluide de l'entrefer.

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\sum\vec{T}_{forces\ extérieures} \tag{30}$$

Sachant que les forces extérieures de pression sont suivant la direction radiale sphérique (normales aux surfaces sphériques), elles n'ont pas de moments axiaux. La force de gravité n'est pas prise en compte dans cette étude, et même si elle est prise en compte, elle n'a pas de moment axial (elle est suivant la direction de l'axe de rotation). Donc seuls les deux moments axiaux des forces de cisaillement aux surfaces sphériques sont considérés:

$$\frac{d\,\vec{L}}{d\,t} = \vec{T}_{force\ de\,cisaillement\,à\,r=R_1} + \vec{T}_{force\ de\,cisaillement\,à\,r=R_2}$$

Sachant qu'en régime stationnaire, la vitesse azimutale est axisymétrique et, indépendante du temps: $W\left(r,{}^{-},¤,t\right)=W\left(r,{}^{-}\right)$, le moment cinétique axial est stationnaire et sa dérivée temporelle est nulle; et il vient:

$$\vec{0} = \vec{T}_{force\ de\,cisaillement\,à\,r=R_1} + \vec{T}_{force\ de\,cisaillement\,à\,r=R_2} \tag{31}$$

Les modules des torques axiaux des forces de cisaillement des deux sphères sont égaux.

On définit un torque non dimensionnel égal au torque normalisé par « $\Omega_1\ R_1^3$ et dans le tableau 1, on présente les modules du torque des surfaces sphériques des cas considérés. Il est clair que le torque non dimensionnel augmente avec le nombre de Reynolds. Ceci est dû à l'augmentation des forces de cisaillement (non dimensionnelles) aux surfaces sphériques avec l'augmentation du nombre de Reynolds.

Tableau 1 *: Variation du torque adimensionnel des forces visqueuses aux surfaces sphériques en fonction du nombre de Reynolds.*

Nombre Reynolds	Module torque adimensionnel
100	57,6
200	58,2
300	67,6
400	74,7
500	79,4

5. CONCLUSION

La simulation numérique de l'écoulement de Couette sphérique contrarotatif dans un entrefer relativement large ($=0,5$), avec un nombre de Rossby $Ro=-0,5$ et des nombres de Reynolds compris entre 100 et 500 a discerné deux régimes d'écoulements. Le premier régime, obtenu avec le nombre de Reynolds égal à 100, est représenté par un écoulement secondaire sous la forme de deux cellules d'Eckman. Ce régime est caractéristique d'une rotation relativement faible. Avec l'augmentation du nombre de Reynolds, on obtient un autre régime représenté par des cellules d'Eckman pincées près de l'équateur. Le pincement est plus fort avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Pour des nombres de Reynolds supérieurs à 500, d’autres régimes d’écoulements transitoires et non axisymétriques sont possibles. Leurs simulations sont envisageables (et même recommandées) dans un travail futur offrant ainsi de larges perspectives de recherche axées vers l’étude des instabilités hydrodynamiques transitoires et non axisymétriques.

NOMENCLATURE

e	Vecteur unitaire.
L	Moment cinétique axial du fluide adimensionnel.
P	Pression adimensionnelle.
Q	Puissance adimensionnelle de rotation des sphères.
R	Rayon adimensionnel.
Re	Nombre de Reynolds.
Ro	Nombre de Rossby.
r	Coordonnée radiale adimensionnelle.
T	Torque axial adimensionnel.
t	Temps adimensionnel.
U	Composante radiale de la vitesse adimensionnelle.
V	Composante polaire de la vitesse adimensionnelle.
W	Composante azimutale de la

	vitesse adimensionnelle.
z	Axe de rotation des sphères.
	Epaisseur de l'entrefer sphérique adimensionnelle.
¤	Coordonnée azimutale adimensionnelle.
«	Viscosité dynamique du fluide.
¬	Viscosité cinématique du fluide.
¯	Coordonnée polaire adimensionnelle.
°	Rayon cylindrique.
ơ	Masse volumique du fluide.
²	Contrainte de cisaillement adimensionnelle.
µ	Vorticité adimensionnelle.
t	Vitesse angulaire adimensionnelle.
·	Fonction de courant adimensionnelle.
∇	Opérateur vectoriel Nabla en coordonnées sphériques.
1	Relatif à la sphère intérieure
2	Relatif à la sphère extérieure
r, ¯ ,¤	Relatif aux coordonnées radiale, polaire et azimutale respectivement
°	Relatif au rayon cylindrique

Références

[1] M. Junk, C. Egbers, *Isorthermal Spherical Couette Flow*, Selected Topics of the 11th Int. Couette-Taylor Workshop, Physics of Rotating Fluids, C. Egbers, G. Pfister (Eds.), Held at Bremen, Germany, July 1999, p.215-233.

[2] I. Proudman, *The Almost Rigid Rotation of Viscous Fluid Between Concentric Spheres,* J. Fluid Mech., Vol. 1, 1956, p.505-516.

[3] K. Stewartson, *On Almost Rigid Rotations*, J. Fluid Mech., Vol. 26, Part 1, 1966, p.131-144.

[4] B. R. Munson, D. D. Joseph, *Viscous Incompressible Flow Between Concentric Rotating Spheres*, *Basic Flow*, J. Fluid Mech., Vol. 49, Part 2, 1971, p.289-303.

[5] B. R. Munson, D. D. Joseph, *Viscous Incompressible Flow Between Concentric Rotating Spheres*, *Hydrodynamic stability*, J. Fluid Mech., Vol. 49, Part 2, 1971, p.305-318.

[6] J.-P. Bonnet, T. A. de Roquefort, *Ecoulement Entre Deux Sphères Concentriques en Rotation*, J. Méc., Vol. 15, N°3, 1976, p.373-396.

[7] M. Wimmer, *Experiments on the Stability of Viscous Flow Between Two Concentric Rotating Spheres,* J. Fluid Mech., Vol. 103, 1981, p.117-131.

[8] I. M. Yavorskaya, Y. N. Belyaev, *Hydrodynamical Stability in Rotating Spherical layers: Application to Dynamics of Planetary Atmospheres,* Acta Astronautica, Vol. 13, N°6/7, 1986, p.433-440.

[9] B. V. Pal'tsev, A. V. Svatsev, I. I. Chechel', *Numerical Study of the Basic Stationary Spherical Couette Flow at Low Reynolds Numbers*, Comp. Math. and Math. Physics, Vol. 47, N°4, 2007, p.664-686.

[10] R. L. Panton, *Incompressible Flow*, Chap. 12, J. Wiley & Sons, New York, 1984.

[11] S. V. Patankar, *Numerical Heat Transfer* and *Fluid Flow*, Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1980.

[12] M. D. Greenberg, *Foundations of Applied Mathematics*, Chapter 21, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1978.