

## ANALYTICAL EXPRESSION FOR THE ELECTRIC FIELD OF THE SINGLE MODE LASER HOMOGENEOUS BROADENING IN THE PULSE REGIME

S. Ayadi

Laboratoire d'électronique quantique. Faculté de physique. USTHB BP N 32  
El Alia Bab Ezzouar Alger

Received: 25 November 2012 / Accepted: 02 December 2012 / Published online: 30 June 2012

---

### ABSTRACT

The simplest model of the laser is that of a single mode system homogeneously broadened. The dynamical behavior of this laser is described by three differential equations, called Haken-Lorenz equations [1], similar to the Lorenz model [1] already known to predict deterministic chaos.

In previous recent work [5-7] we have proposed a simple harmonic expansion method to obtain a series of harmonics terms that yield analytical solutions to the laser equations. This method allows us to derive an analytical expression of the laser field amplitude when this last undergoes a periodic oscillations around zero mean value. We also obtain an analytical expression of the pulsing frequency.

**Keywords:** Laser, instabilities and chaos

### 1. INTRODUCTION

Plusieurs travaux [1-4] ont mis en évidence la tendance du système dissipatif Haken-Lorenz à adopter un comportement périodique pour des taux de pompage  $2C$  supérieurs au deuxième seuil laser «  $2C_{2th}$  » (seuil d'instabilité).

---

Author Correspondence, e-mail: [samia\\_ay@yahoo.com](mailto:samia_ay@yahoo.com)

[ICID: 1020742](#)

On propose une approche analytique[5-7] des solutions périodiques du système Haken-Laser basée sur un développement en séries de Fourier tout en s'inspirant de l'analyse aux petits signaux, initialement proposée par Casperson et largement améliorée par Hendow et Sargent[8,9] dans le cadre des systèmes à élargissement inhomogène.

## 2. REGIME AUTO PULSE

Avant d'entamer le calcul analytique nous allons présenter quelques résultats obtenus par intégration numérique du système d'équations qui régit la dynamique du laser monomode à élargissement homogène [10]:

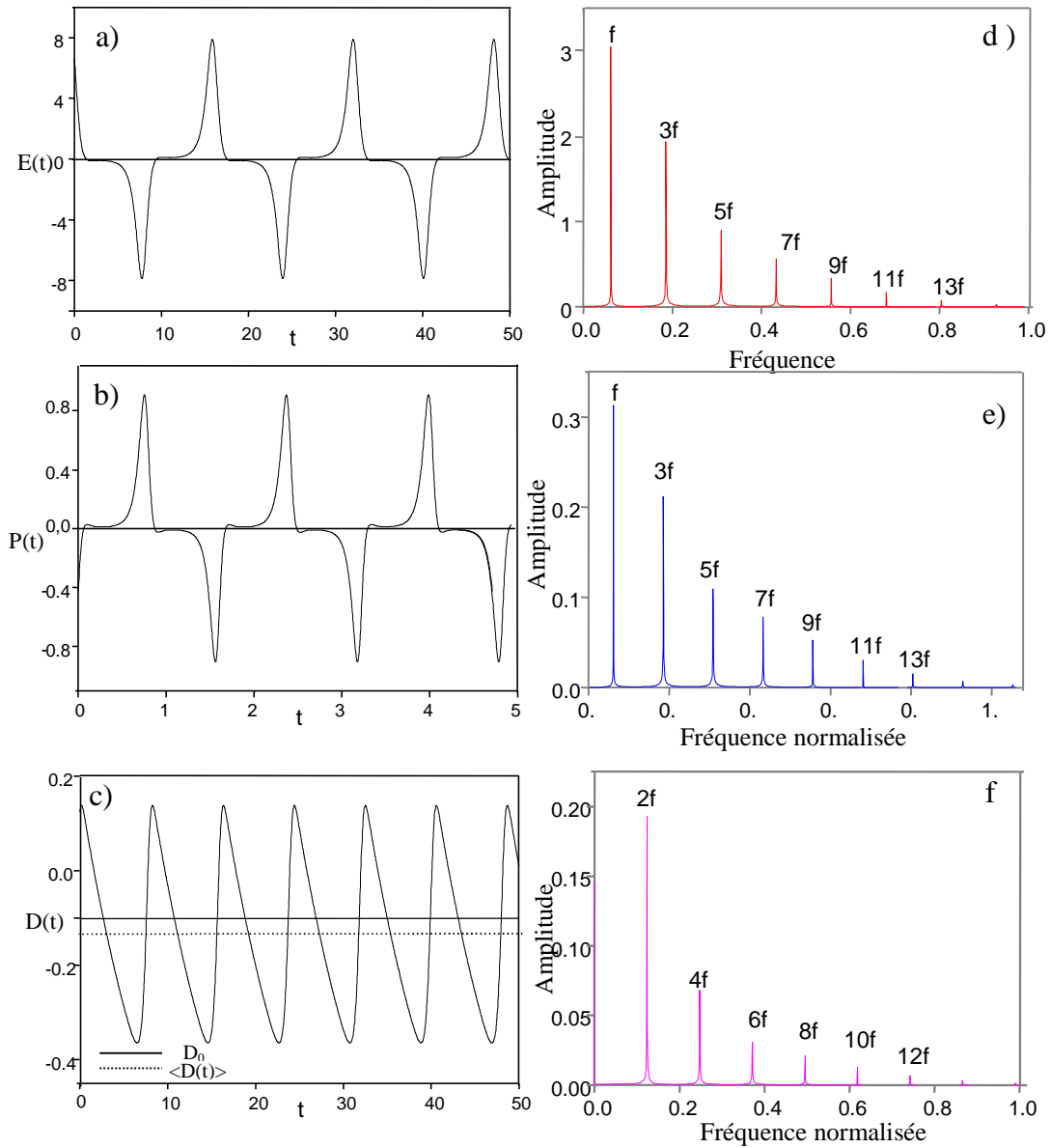
$$\dot{E}(t) = -k\{E(t) + 2CP(t)\} \quad (1a)$$

$$\dot{P}(t) = -\gamma_{\perp}\{-P(t) + E(t)P(t)\} \quad (1b)$$

$$\dot{D}(t) = -\gamma_{\parallel}\{D(t) + 1 + E(t)P(t)\} \quad (1c)$$

Où  $E(t)$  représente le champ électrique dans la cavité laser,  $P(t)$  et  $D(t)$  sont respectivement la polarisation et l'inversion de population ( $N_1-N_2$ ) du milieu atomique.  $k$ ,  $\gamma_{\parallel}$  et  $\gamma_{\perp}$  sont respectivement les taux de relaxation du champ électrique, de l'inversion de la population et de la polarisation du milieu laser.  $2C$  désigne le taux de pompage.

La figure 1 présente un type de fonctionnement pulsé obtenu par résolution numérique du système 1 avec les paramètres de contrôle  $k=3$ ,  $\gamma=0.1$  pour  $2C=10$ . On note l'évolution périodique du champ laser et de la polarisation autour d'une valeur moyenne égale à zéro. On constate d'après les spectres de fréquences figures 1.d et 1.e la présence d'harmoniques d'ordre impaire. La différence de population (figure 1.c) oscille périodiquement autour d'une valeur constante  $d_c=-0.1$ , en révélant des harmoniques d'ordre pair dans le domaine spectral (figure 1.f).



**Fig.1.** Evolutions temporelles a) le champ électrique, b) la polarisation et c) l'inversion de population obtenues par intégration du système 1 ainsi que les FFT e) , f) et d) correspondant a chaque signal pour  $k=3$  ,  $x=0.1$  et  $2C=10$ .

### 3. APPROCHE ANALYTIQUE

Les grandes lignes de notre procédé se basent sur les observations préalablement faites au paragraphe 2 qui suggèrent d'écrire les solutions analytiques du système 1 sous forme:

$$E(t) = \sum_n E_n \cos(n\Delta t) \quad n = 1,3,5, \quad (2.a)$$

$$P(t) = \sum_n (P_1)_n \cos(n\Delta t) + (P_2)_n \sin(n\Delta t) \quad n = 1, 3, 5, \quad (2.b)$$

$$D(t) = d_c + \sum_n (D_1)_n \cos(n\Delta t) + (D_2)_n \sin(n\Delta t) \quad n = 2, 4, 6, \quad (2.c)$$

Amorçons d'abord les calculs en se limitant à l'ordre 3 pour le champ et la polarisation, et à l'ordre 2 pour l'inversion de population. L'identification des coefficients ayant le même cosinus et sinus nous donne l'expression de la fréquence de pulsation [6]:

$$\Delta = \sqrt{\frac{(2C-1)kx(2+x) - 3(k+1)x^2}{8(k+1) - x(2k+x+4)}} \quad (3)$$

Le spectre de fréquences de la figure 1.d indique que les oscillations se font à la fréquence angulaire  $\Delta_N \approx 0.39$  valeur très proche de celle évaluée à partir de 3 qui vaut  $\Delta \approx 0.42$ .

### Expression analytique pour le champ électrique

Nous continuons la même démarche déjà mise en œuvre au paragraphe 2 afin d'obtenir l'amplitude du champ à l'ordre un et trois. Ceci conduit à l'expressions:

$$E(t) = E_1 \cos(\Delta t) - \frac{T_{3d}(x^2(1-3\Delta^2) - 8x\Delta^2) \frac{E_1^3}{4}}{1 - T_{1d}(x^2(1-\Delta^2) - 4x\Delta^2) \frac{E_1^2}{4}} \cos(3\Delta t) \quad (4)$$

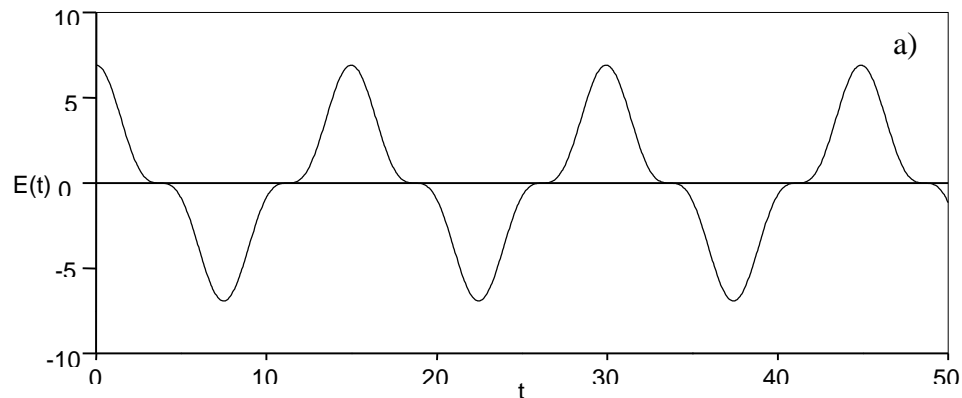
$$\text{où } E_1 = 2 \sqrt{\frac{(k+1)(x^2 + 4\Delta^2)(1 + \Delta^2)}{2kx(1+x-\Delta^2) + x^2(1+\Delta^2) - 4x\Delta^2}} \quad (5)$$

$$T_{1d} = \frac{1}{(1+\Delta^2)(x^2+4\Delta^2)} \quad \text{et} \quad T_{3d} = \frac{1}{(1+9\Delta^2)(x^2+4\Delta^2)}$$

Pour  $k=3$ ,  $x=0.1$  et  $2C=10$ , on aura :  $\Delta = 0.42$  et l'expression 5 prend la forme:

$$E(t) = 5.19 \cos(0.42t) + 1.72 \cos(1.26t) \quad (6)$$

La représentation graphique de ce champ à l'ordre 3 (figure.2) montre une certaine similitude avec le tracé du champ laser figure 1 donné par résolution numérique. De ce fait en se limitant à l'ordre 3, l'expression de la fréquence de pulsation qui en découle approche très bien la valeur trouvée numériquement. L'amplitude du champ déduite de la figure.2  $E_N=7.69$  diffère un peu de la valeur analytique  $E_A = 6.95$  tirée de la figure 1. Il va de soit que les ordres supérieurs à 3 établiront une meilleure similitude.



**Fig.2.** Tracé temporel de l'expression analytique du champ électrique à l'ordre trois

#### 4. CONCLUSION

Nous avons exposé, dans ce chapitre, une approche analytique qui s'appuie sur un développement en série de Fourier des variables: champ électrique, inversion de population et polarisation. Le développement harmonique aux grands signaux jusqu'à l'ordre trois pour l'amplitude du champ électrique, nous a permis d'extraire l'expression analytique du champ électrique, en fonction des paramètres de contrôle, lorsqu'il effectue des oscillations périodiques autour de zéro.

#### 5. REFERENCES

- [1] Lorenz E. N., Atmos J. Science. 1963, 20, 130.
- [2] Haken H. phys. Lett. 1975, A 53, 77.
- [3] Haken H. Light. North-Holland physics publishing. 1985, 2.
- [4] Khanin Y. I. Principals of laser dynamics. North-Holland Elsevier Science. 1995.
- [5] Ayadi S. and Meziane B. Opt. Quant. Elect. 2007, 39, 51.
- [6] Meziane B. and Ayadi S. Opt. Commun. 2008, 281(15-16), 4061-4067.
- [7] Ayadi S. and Meziane B. Proc.of SPIE. SPIE-Europe-2008, 6997.

- [8] Hendow S.T. and Sargent M. *Opt. Commun.* 1982, 40, 385-389.
- [9] Hendow S. T. and Sargent M. *J. Opt. Soc. Am. B.* 1985, 2, 84-101.
- [10] Narducci L. M., Sadiky H., Lugiato H. and Abraham N. B. *Opt. Commun.* 1985, 55, 370-376.

---

**EXPRESSION ANALYTIQUE POUR LE CHAMP ELECTRIQUE DU LASER  
MONOMODE A ELARGISSEMENT HOMOGENE DANS LE REGIME PULSE**

**RESUME**

Le modèle le plus simple du laser est celui d'un système monomode à élargissement homogène. Il est décrit par un système de trois équations différentielles analogues aux équations de Lorenz [1] et que l'on désigne communément par modèle de Lorenz-Haken[2] ou Laser-Lorenz.

Dans nos récents travaux [5-7] nous avons exposé une méthode analytique basée sur un développement en séries de Fourier. Cette méthode vas nous permettre de retrouver l'expression littérale du champ électrique laser lorsque ce dernier effectue des oscillations périodiques autour de zéro, ainsi que la fréquence de pulsation en fonction des paramètres de contrôle.

**Mots-clés :** Laser, instabilités et chaos.

**How to cite this article**

Ayadi S. Analytical expression for the electric field of the single mode laser homogeneous broadening in the pulse regime. J Fundam Appl Sci. 2012, 4(1), 88-94.