



Afrika Statistika

Vol. 8, 2013, pages 515–544.

DOI: <http://dx.doi.org/10.4314/afst.v8i1.3>

## Comportement de la fonction d'autocorrélation des modèles à changement de régime : une approche empirique

Souleymane Fofana<sup>†,\*</sup> and Abdou Kâ Diongue<sup>‡</sup>

<sup>†</sup>Ecole Nationale de la Statistique et de l'Analyse Economique, ENSAE-Sénégal

<sup>‡</sup>LERSTAD, Universit Gaston Berger, Saint-Louis Sénégal

Received: May 27, 2013; Accepted: November 05, 2013

Copyright © 2013, Afrika Statistika. All rights reserved

**Abstract.** It is proved in several works as well in finance that in economics (see, for example [Timmermann, 2000](#)) that in theory the regime switching models, under stationarity hypothesis, are short memory. However, the empirical autocorrelation function (ACF) of these models decreases slowly towards zero, resembling so to that of long memory processes. In this paper we are interested to the study of the empirical behavior of the ACF of processes in order to distinguish the long memory behavior to the regime switching by using Monte Carlo simulations. Two methods are used: the one based on tests and the other on estimators of the long memory parameter. Finally, an application on real data is proposed.

**Résumé.** Il est prouvé dans plusieurs travaux, aussi bien en finance qu'en économie (voir par exemple, [Timmermann, 2000](#)), que théoriquement les modèles à changement de régime, sous l'hypothèse de stationnarité, sont à courte mémoire. Cependant, la fonction d'autocorrélation (ACF) empirique de ces modèles décroît très lentement vers zéro, ressemblant ainsi à celle des processus à mémoire longue. Dans cet article, nous nous intéressons à l'étude du comportement empirique de l'ACF des processus afin de distinguer la longue mémoire au changement de régime en utilisant des simulations de Monte Carlo. Deux méthodes sont considérées: l'une basée sur des tests et l'autre sur des estimateurs du paramètre de longue mémoire. Enfin, une application sur des données réelles est aussi proposée.

**Key words:** ACF; Longue mémoire; Changement de régime.

**AMS 2010 Mathematics Subject Classification :** 37M10; 62M10; 91B84.

---

\*Corresponding author Souleymane Fofana: [fof\\_sn@yahoo.fr](mailto:fof_sn@yahoo.fr)

Abdou Kâ Diongue : [kadiongue@yahoo.fr](mailto:kadiongue@yahoo.fr)

## 1. Introduction

Ces dernières années, de nombreux travaux théoriques soulignent le comportement de mémoire courte des modèles à changement de régime. Ce comportement est caractérisé par une décroissance rapide de la fonction d'autocorrélation et est observé sur plusieurs modèles à changement de régime comme les modèles Markov à changement de régime (Hamilton, 1989), les modèles autorégressifs à seuil (Lim et Tong, 1980), les modèles à ruptures occasionnelles (Chen et Tiao, 1990 et Engle et Smith, 1999 voir Granger et Hyung, 2000 pour plus de détails sur ces modèles). Ces modèles structurels sont maintenant largement utilisés pour modéliser des séries de taux de change etc. Les séries étudiées sont supposées stationnaires sur tout l'ensemble des observations (globalement stationnaire) et à courte mémoire. En effet, plusieurs études empiriques ont montré l'existence de la mémoire longue sur les séries étudiées. Lobato et Savin (1998) ont montré qu'il existe plusieurs sources de présence de mémoire longue (c'est à dire de la décroissance lente de l'ACF) dans des séries financières présentant des changements structurels. Parmi ces sources, nous pouvons citer la non stationnarité, l'agrégation des données, la saisonnalité persistente, la déformation en taille, l'inexistence des moments d'ordre supérieur. Par exemple, Breidt and Hsu (2002) ont montré que si les sauts sont rares par rapport à la taille de l'échantillon alors le processus courte mémoire a un comportement proche de celui d'un processus longue mémoire. Il est ainsi possible de détecter une décroissance lente de l'ACF sur une série à caractère courte mémoire. Selon Lamoureux et Lastrapes (1990), les changements (de régime) au niveau de la volatilité non conditionnelle (la non stationnarité) sont une forme de persistance. Récemment, Charfeddine et Guégan (2012) ont étudié le problème de l'estimation du paramètre longue mémoire en considérant des simulations de Monté Carlo lorsque le modèle est mal spécifié. Ils ont montré que l'estimation du paramètre longue mémoire sans tenir compte de changement de régime dans les données peut conduire à une surestimation du vrai paramètre. Dans cet article, nous essayons de voir s'il est possible, en utilisant des tests, de détecter la présence de longue mémoire sur des données issues de processus à changement de régime.

Notre objectif est alors de montrer, en considérant la fonction d'autocorrélation empirique, que sous l'hypothèse de stationnarité, la fonction d'autocorrélation des processus à changement de régime peut décroître lentement ressemblant ainsi à celle des processus à mémoire longue. Cette décroissance lente peut être due soit à l'existence d'une non stationnarité ou stationnarité locale – qui remettrait en question l'hypothèse de la stationnarité globale du processus, soit à l'existence d'une longue mémoire. Ceci nous amène aux questions suivantes: est-il possible de mettre en évidence l'existence d'une longue mémoire? Quel type de longue mémoire avons-nous? Avons-nous une longue mémoire résultant d'une non stationnarité (longue mémoire fausse)? Ou s'agit-il de la longue mémoire qui suppose que les événements qui se sont passés pendant un certain nombre d'années ont un effet sur la dynamique de la série (longue mémoire réelle)? Nous proposons ainsi dans ce travail d'étudier d'abord des tests de changement structurel contre longue mémoire. Particulièrement, nous considérons le test sémi-paramétrique GPH et les tests basés sur les statistiques de Box-Pierce et Ljung-Box, afin d'examiner leur performance et leur puissance. Nous étudions ensuite, comme dans Bisaglia et Gerolimetto (2009) et Charfeddine et Guégan (2012), l'estimation du paramètre longue mémoire en considérant plusieurs méthodes développées dans la littérature afin de comparer leur performance.

L'article est organisé de la façon suivante: la Section 2 définit les modèles à changement de régime. Dans la Section 3, nous examinons empiriquement le comportement de la fonction d'autocorrélation des différents modèles définis dans la Section 2. Nous montrons la décroissance lente de la fonction d'autocorrélation de ces processus théoriquement considérés comme processus à mémoire courte. La Section 4 est consacrée à la description des méthodes qui seront utilisées pour la détection de la longue mémoire. Dans la Section 5, nous proposons des simulations de Monté Carlo. La Section 6 est consacrée à l'application sur les données S&P 500.

## 2. Les modèles à changement de régime

Cette section concerne la modélisation non linéaire des séries temporelles, particulièrement dans le domaine de la finance (par exemple le prix des actions), dont la modélisation par les équations linéaires est insuffisante. Ceci peut en effet survenir lorsque, pour des raisons structurelles, les valeurs de certains paramètres se modifient au cours du temps de manière continue ou discrète. Le modèle linéaire devenant ainsi inadapté. Le vrai modèle peut alors contenir des facteurs exogènes dont l'influence change d'une période à l'autre, suggérant ainsi les modèles non linéaires. Les modèles non linéaires permettent de définir différents états de la nature ou régimes (Franses et Van Dijk, 2000). La dynamique de la variable étudiée (moyenne, variance, autocorrélation) dépend du régime dans lequel elle se trouve. Les modèles qui permettent d'étudier ce type de phénomène sont connus sous le nom de modèles à changement de régime (regime switching models). Considérons un actif financier A, soit  $X_t$  son modèle de prix s'exprimant comme la somme d'une moyenne  $m_t$  et d'un bruit  $\varepsilon_t$ , on a, pour tout  $t = 1, \dots, T$  :

$$X_t = m_t + \varepsilon_t, \tag{1}$$

Supposons que la variable  $m_t$  suit plusieurs comportements sur la période analysée  $[0, T]$ , on obtient alors un changement d'état sur le niveau du prix de l'actif. Supposons qu'il existe deux régimes gouvernés par une variable économique, par exemple un régime de haute volatilité et un régime de basse volatilité. Donc  $m_t$  dépend du régime sur lequel le processus se trouve. Soit  $s_t \in \{0, 1\}$  la variable économique, représentant les régimes au temps  $t$ . Dans ce cas la moyenne du prix est  $m_{s_t}$ . L'équation (1) devient,

$$X_t = m_{s_t} + \varepsilon_t, \tag{2}$$

avec

$$m_{s_t} = (1 - s_t)m_0 + s_t m_1,$$

et  $\varepsilon_t$  est un terme d'erreur ou de perturbation supposé être indépendant et identiquement distribué (iid), de moyenne nulle et de variance finie  $\sigma^2$  ( $\varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ ), et  $s_t$  et  $\varepsilon_t$  sont indépendants pour tout  $t$ .

L'équation (2) représente le modèle à changement de régime le plus simple. Même si  $X_t$  suit une tendance linéaire dans chaque régime, le modèle (2) est considéré non linéaire. La variable  $s_t$  peut être observable comme ne pas l'être. En fonction du type de comportement observé sur le modèle (2), plusieurs modèles à changement de régime existent dans la littérature. Dans ce travail, nous étudions plusieurs d'entre eux.

### 2.1. Le modèle de Markov

Le modèle de Markov à changement de régime d'ordre  $p$  et à deux régimes est défini comme suit:

$$X_t = \begin{cases} m_0 + \sum_{k=1}^p \alpha_{k,0} X_{t-k} + \varepsilon_t & \text{si } s_t = 0 \\ m_1 + \sum_{k=1}^p \alpha_{k,1} X_{t-k} + \varepsilon_t & \text{si } s_t = 1, \end{cases} \quad (3)$$

où  $m_0$  et  $m_1$  sont des paramètres réels et  $\varepsilon_t$  défini de la même manière qu'en (2). Une écriture alternative pour (3) est:

$$X_t = \left( m_{s_t} + \sum_{k=1}^p \alpha_{k,s_t} X_{t-k} \right) (1 - s_t) + \left( m_{s_t} + \sum_{k=1}^p \alpha_{k,s_t} X_{t-k} \right) s_t + \varepsilon_t.$$

$s_t$  est une chaîne de Markov à deux régimes qui agit sur la variable  $m_t$ . Dans la suite, nous nous intéresserons, sans perte de généralité, au modèle Markov à changement de régime du type:

$$X_t = \begin{cases} m_0 + \varepsilon_t & \text{si } s_t = 0 \\ m_1 + \varepsilon_t & \text{si } s_t = 1 \end{cases} \quad (4)$$

Ce modèle à changement de régime Markovien a été présenté par [Hamilton \(1989\)](#) pour étudier les taux d'intérêt américains. Les modèles à changement de régime Markovien, se fondent sur le principe selon lequel la probabilité de réalisation d'un régime est conditionnelle aux réalisations passées des variables d'intérêt ([Engle et Hamilton, 1990](#)). Ces modèles se basent sur deux processus stochastiques dépendants l'un de l'autre. En effet, la variable d'état  $s_t$  du système n'est plus directement observable; il est caché par un processus d'observation. Par conséquent, le modèle (4) ne peut être estimé car le régime courant  $s_t$  dépend du régime antérieur  $s_{t-1}$ .

Pour remédier à la situation, on utilise la probabilité de passage d'un régime à l'autre. Le problème est complètement défini si les probabilités de transition entre les différents régimes sont connues. Soit  $p_{ij}$ ,  $i, j = 0, 1$  une probabilité associée aux changements d'état,

$$P(s_t | s_{t-1}) = \begin{cases} p_{11} & \text{si } s_t = s_{t-1} = 0 \\ 1 - p_{11} & \text{si } s_t = 1, s_{t-1} = 0 \\ p_{22} & \text{si } s_t = s_{t-1} = 1 \\ 1 - p_{22} & \text{si } s_t = 0, s_{t-1} = 1, \end{cases} \quad (5)$$

où  $P(s_t | s_{t-1})$ , supposée constante, représente la probabilité d'être dans le régime  $s_t$  au temps  $t$  conditionnellement au régime précédent. Soit  $M$  la matrice de transition de la chaîne  $s_t$  qui caractérise la variable  $m_{s_t}$ ,  $M$  est définie par:

$$M = \begin{pmatrix} p_{11} & 1 - p_{11} \\ 1 - p_{22} & p_{22} \end{pmatrix}.$$

La fonction d'autocorrélation du modèle de Markov à changement de régime (3) décroît exponentiellement vers zéro, identique à celle d'un GARCH ([Timmermann, 2000](#)). La fonction d'autocorrélation du processus de Markov à changement de régime (3) a été étudiée par [Guégan et Riublanc \(2005\)](#) et est donnée par

$$\Gamma(h) = \frac{(m_0 - m_1)^2(1 - p_{11})(1 - p_{22})\rho^h}{(2 - p_{11} - p_{22})^2[\pi_1 m_0^2 + \pi_2 m_1^2 + 1 - (\pi_1 m_0 + \pi_2 m_1)^2]}, \quad \forall h > 0 \quad (6)$$

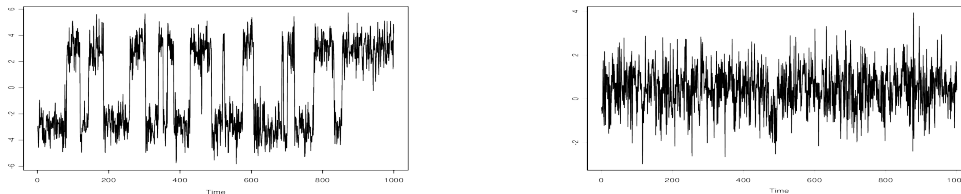
où

$$\rho = -1 + p_{11} + p_{22},$$

$$\pi_1 = P(s_t = 1) = \frac{1 - p_{22}}{2 - p_{11} - p_{22}} \quad \text{et} \quad \pi_2 = P(s_t = 2) = \frac{1 - p_{11}}{2 - p_{11} - p_{22}},$$

sont les probabilités non conditionnelles.

$$\begin{cases} m_0 = 3 & p_{11} = p_{22} = 0.98 \\ m_1 = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} m_0 = 0.5 & p_{11} = 0.95 \\ m_1 = -0.5 & p_{22} = 0.99 \end{cases}$$



**Fig. 1.** Modèle Markov à changement de régime simulé avec Nbre-régime=2, Taille de l'échantillon  $T = 1000$ .

D'après la Figure 1, l'évolution des données du modèle Markov à deux états, avec les moyennes  $m_0$  et  $m_1$  élevées en valeur absolue, est localement stationnaire dès qu'on reste dans un régime mais il semble être globalement stationnaire si les moyennes en valeur absolue deviennent petites.

### 2.2. Les modèles à rupture de structures

Les modèles à rupture de structures (Structural Break Models) sont caractérisés par un changement de structure à un instant  $t = \tau$ . Le modèle se définit comme suit:

$$X_t = \begin{cases} m_0 + \sum_{k=1}^p \alpha_{k,0} X_{t-k} + \varepsilon_t & \text{si } t \leq \tau \\ m_1 + \sum_{k=1}^p \alpha_{k,1} X_{t-k} + \varepsilon_t & \text{si } t > \tau \end{cases} \quad (7)$$

où  $m_0$  et  $m_1$  sont des paramètres réels et  $\varepsilon_t$  définit de la même manière qu'en (2),  $X_{t-k}$  est l'observation à la date  $t-k$  de la variable aléatoire  $X_t$ . En introduisant la fonction indicatrice  $I_{t,\tau}$ :

$$I_{t,\tau} = \begin{cases} 1 & \text{si } t > \tau \\ 0 & \text{si } t \leq \tau \end{cases} \quad (8)$$

le modèle (7) peut être réécrit sous la forme suivante:

$$X_t = \left( m_0 + \sum_{k=1}^p \alpha_{k,0} X_{t-k} \right) (1 - I_{t,\tau}) + \left( m_1 + \sum_{k=1}^p \alpha_{k,1} X_{t-k} \right) I_{t,\tau} + \varepsilon_t \quad (9)$$

Lorsque  $t \leq \tau$  alors  $I_{t,\tau} = 0$  et (7) est équivalent à  $m_0 + \sum_{k=1}^p \alpha_{k,0} X_{t-k} + \varepsilon_t$  et pour  $t > \tau$   $I_{t,\tau} = 1$  ( $1 - I_{t,\tau} = 0$ ) et (7) est équivalent à  $m_1 + \sum_{k=1}^p \alpha_{k,1} X_{t-k} + \varepsilon_t$ . La Figure 2 représente le graphique des données simulées provenant du modèle à rupture de structures.

$m_0 = -2, m_1 = 2$  (a)

$m_0 = -0.21, m_1 = 0.28$  (b)



**Fig. 2.** Modèle à rupture structurelles simulés avec Nbre-régime=2,  $\alpha_{10} = 0.29$   $\alpha_{20} = -0.22$   $\alpha_{11} = 0.27$   $\alpha_{21} = -0.18$

Figure 2(a) montre un changement de régime caractérisé par une rupture en moyenne de grande ampleur, le changement de régime est intervenu à l’instant  $\tau \approx 500$  tandis que celle de Figure 2(b) montre beaucoup de ruptures sur la trajectoire du modèle. Les changements dans ce dernier cas, vue l’allure des différents régimes, ne sont pas faciles à détecter.

### 2.3. Les modèles autorégressifs à seuil (TAR)

Connus dans la littérature anglo-saxonne sous le nom de Threshold Autoregressive model (TAR model), les modèles autorégressifs sont introduits par [Lim et Tong \(1980\)](#). Ce type de modèle exhibe un comportement incorporant des changements de régime liés au dépassement d’un seuil  $c$  par une variable de transition exogène observée que nous représentons ici par  $s_t = X_{t-1}$ .

$$X_t = \begin{cases} m_0 + \sum_{k=1}^p \alpha_{k,0} X_{t-k} + \varepsilon_t & \text{si } X_{t-1} \leq c \\ m_1 + \sum_{k=1}^p \alpha_{k,1} X_{t-k} + \varepsilon_t & \text{si } X_{t-1} > c \end{cases} \quad (10)$$

Une écriture alternative de (10) est:

$$X_t = \left( m_0 + \sum_{k=1}^p \alpha_{k,0} X_{t-k} \right) (1 - I(X_{t-1}, c)) + \left( m_1 + \sum_{k=1}^p \alpha_{k,1} X_{t-k} \right) I(X_{t-1}, c) + \varepsilon_t \quad (11)$$

où

$$I(X_{t-1}, c) = \begin{cases} 0 & \text{si } X_{t-1} \leq c \\ 1 & \text{si } X_{t-1} > c \end{cases} \quad (12)$$

Dans le cas où la variable observée  $X_t$  est retardée de  $h > 0$  et alors  $s_t = X_{t-h}$ , on obtient le modèle SETAR (Self-Exciting Threshold AutoRegressive Model). Le modèle SETAR est un prolongement du modèle de classe TAR. L'idée sous-jacente de ce type d'approche est qu'une relation peut être non linéaire sur la période globale considérée mais linéaire par sous périodes. La forme du modèle SETAR d'un processus stochastique  $X_t$ , s'écrit:

$$X_t = \left(m_0 + \sum_{k=1}^p \alpha_{k,0} X_{t-k}\right) (1 - I(X_{t-h}, c)) + \left(m_1 + \sum_{k=1}^p \alpha_{k,1} X_{t-k}\right) I(X_{t-h}, c) + \varepsilon_t \quad (13)$$

où

$$I(X_{t-h}, c) = \begin{cases} 0 & \text{si } X_{t-h} \leq c \\ 1 & \text{si } X_{t-h} > c \end{cases} \quad (14)$$

Une caractéristique importante du modèle SETAR est que le changement de régime est déterminé par des valeurs retardées de la série  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ . Nous noterons ce modèle d'ordre  $p$  décrit par 2 régimes par  $SETAR(2, p)$ .



**Fig. 3.** Modèles TAR  $h = 1$  et SETAR  $h = 2$  simulés avec Nbre-régime=2,  $m_0 = -1$ ,  $m_1 = 1$ ,  $\alpha_{10} = 0.29$ ,  $\alpha_{20} = -0.22$ ,  $\alpha_{11} = 0.27$ ,  $\alpha_{21} = -0.18$

Une analyse visuelle des deux graphiques permet de constater que l'évolution des données représentées de ces deux modèles n'est pas différente. L'échelle des valeurs simulées est presque identique. Le passage entre les deux régimes se fait brusquement en fonction du signe de  $X_{t-1}$  ( $h = 1$ ).

#### 2.4. Les modèles à ruptures occasionnelles

Les processus à rupture occasionnelles (Occasional break model) ont été introduit par [Chen et Tiao \(1990\)](#) puis par [Engle et Smith \(1999\)](#). Ils se définissent comme suit:

$$X_t = m_t + \varepsilon_t \quad (15)$$

avec

$$\begin{aligned} m_t &= m_{t-1} + q_t \eta_t \\ &= m_0 + \sum_{i=1}^t q_i \eta_i \end{aligned} \quad (16)$$

où  $\varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma_\varepsilon^2)$  et  $\eta_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma_\eta^2)$  pour  $t = 1, \dots, T$  et  $q_t$  une variable aléatoire suivant une

distribution binomiale :

$$q_t = \begin{cases} 0 & \text{avec une probabilité } 1-p \\ 1 & \text{avec une probabilité } p \end{cases} \quad (17)$$

Donc la combinaison de (15) et de (16) donne:

$$X_t = m_0 + \sum_{i=1}^t q_i \eta_i + \varepsilon_t \quad (18)$$

Ce modèle est appelé mean plus noise model dans la littérature anglo-saxonne. Notons que sous la distribution binomiale les changements au niveau du modèle sont brusques. Alors que dans certains cas les changements structurels peuvent se produire de manière graduelle. On peut donc utiliser une extension simple de (17) comme suit:

$$q_t = \begin{cases} 0 & \text{si } s_t = 0 \\ 1 & \text{si } s_t = 1, \end{cases} \quad (19)$$

$q_t$  devient un modèle à changement de régime, où la variable aléatoire discrète  $s_t$ , indicatrice des régimes (régime 0, régime 1), est supposée être gouvernée par la loi de probabilité Markovienne  $p_{ij} = P(s_t = j | s_{t-1} = i)$  (voir section 2.1).

Dans cette classe de modèle Engle et Smith (1999) proposent le modèle Stopbreak (Stochastic permanent break model). Ce modèle définit  $m_t$  comme suit:

$$\begin{aligned} m_t &= m_{t-1} + q_{t-1} \varepsilon_{t-1} \\ &= m_0 + \sum_{i=1}^{t-1} q_{t-i} \varepsilon_{t-i}, \end{aligned} \quad (20)$$

où  $q_t = q(|\varepsilon_t|)$  est une fonction non décroissante de  $|\varepsilon_t|$  et bornée par 0 et 1. Ils utilisent

$$q_t = \frac{\varepsilon_t^2}{\gamma + \varepsilon_t^2}, \quad \gamma > 0. \quad (21)$$

La fonction d'autocorrélation du modèle à ruptures occasionnelles (18) d'après Granger et Hyung (2000, 2004) est approximativement donnée par,

$$\gamma(h) = \frac{\sum_{t=1}^{T-h} (X_t - \bar{X})(X_{t+h} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2} \approx \frac{\frac{pT\sigma_\eta^2}{6} \left(1 - \frac{h}{T}\right) \left(1 - 2\left(\frac{h}{T}\right) + 4\left(\frac{h}{T}\right)^2\right)}{\frac{pT\sigma_\eta^2}{6} + \sigma_\varepsilon^2} \quad (22)$$

Engle et Smith (1999) montrent que le modèle Stopbreak qu'ils ont proposé est une approximation du modèle "mean plus noise" considéré par Granger et Hyung (2004) pour le calcul de la fonction d'autocorrélation. Ainsi, nous supposons que la fonction d'autocorrélation du modèle Stopbreak se comporte comme celle de l'équation (22).

Le graphique du modèle à rupture occasionnelle montre deux ruptures visibles, l'évolution des données semble être stationnaire par morceaux. Alors que l'évolution du modèle Stopbreak semble être globalement stationnaire.





**Fig. 4.** Modèle à rupture occasionnelles et Stopbreak simulés avec Nbre-régime=2,  $p = 0.001$ ,  $\gamma = 100$ ,  $T = 3000$ .

### 3. Comportement de l'ACF sous stationnarité locale

En théorie la fonction d'autocorrélation de tous les modèles à changement de régime considérés ci-dessus, sous la condition de stationnarité de second ordre, décroît exponentiellement vers zéro et leurs densités spectrales sont bornées, mais en pratique ce n'est pas toujours le cas, voir [Guégan et Rioublanc \(2005\)](#). Que se passe-t-il pour le calcul de l'ACF, si nous sommes en présence d'une quelconque non stationnarité ?

On suppose que l'on observe un échantillon  $Y_1, \dots, Y_n$  constitué de sous échantillons différents de modèles stationnaires distincts. Soit  $p_j, j = 0, \dots, r$  des nombres positifs tels que  $p_1 + p_2 + \dots + p_r = 1$  et  $p_0 = 0$ . Posons  $q_j = p_0 + p_1 + \dots + p_j, j = 0, \dots, r, q_j \in [0, 1], [nq_j]$  partie entière de  $nq_j$ .

L'échantillon  $Y_1, \dots, Y_n$  peut être écrit comme suit:

$$Y_1^{(1)}, \dots, Y_{[nq_1]}^{(1)}, \dots, Y_{[nq_{r-1}]+1}^{(r)}, \dots, Y_n^{(r)}$$

où les  $r$  sous échantillons proviennent des modèles ergodiques distincts stationnaires avec un moment d'ordre deux fini. L'échantillon résultant est alors non stationnaire.

Soit  $\gamma_{n,Y}$  la fonction d'autocovariance de l'échantillon d'un processus  $(Y_t)$  on a:

$$\tilde{\gamma}_{n,Y}(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-h} (Y_t - \bar{Y}_n)(Y_{t+h} - \bar{Y}_n), \quad h \in \mathbb{N}, \quad (23)$$

où  $\bar{Y}_n$  est la moyenne de l'échantillon.

Et par le théorème ergodique on a, pour  $h \geq 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\tilde{\gamma}_{n,Y}(h) \rightarrow \sum_{j=1}^r p_j \gamma_{Y^{(j)}}(h) + \sum_{1 \leq i < j \leq r} p_i p_j (EY^{(j)} - EY^{(i)})^2 \quad p.s \quad (24)$$

Pour plus de détails sur cette convergence, voir [Mikosch et Stărică \(2004\)](#).

D'après (24), si on considère une série de données  $X_1, \dots, X_n$ , constituée de  $r$  sous échantillons disjoints présentant chacun une courte mémoire et suivant un bruit blanc, par exemple  $r$  sous

échantillons de GARCH(1,1), donc on a  $E(X_k) = 0$  pour tout  $k = 1, \dots, r$ . Par conséquent en posant  $Y = X$ , on retrouve

$$\tilde{\gamma}_{n,Y}(h) \longrightarrow \sum_{k=1}^r p_j \gamma_{Y^{(k)}}(h) = 0 \text{ quand } h \longrightarrow +\infty \quad (25)$$

car  $\gamma_{Y^{(k)}}(h) \longrightarrow 0$  exponentiellement quand  $h \longrightarrow +\infty$ . Ceci est dû à l'hypothèse de courte mémoire des sous échantillons.

On a  $E(|X_k|) \neq 0$  et  $E(X_k^2) \neq 0$  pour  $k = 1, 2, \dots, r$ , en posant  $Y = |X|$  ou  $Y = X^2$ ,  $\gamma_{Y^{(k)}}(h) \longrightarrow 0$  quand  $h \longrightarrow +\infty$  pour  $k = 1, 2, \dots, r$ .

Donc

$$\tilde{\gamma}_{n,Y}(h) \longrightarrow \sum_{1 \leq i \leq j \leq r} p_i p_j (EY^{(j)} - EY^{(i)})^2 \text{ quand } h \longrightarrow +\infty \quad (26)$$

Ainsi, on voit que l'ACF ( $\tilde{\gamma}_{n,Y}(h)$ ) décroît exponentiellement vers 0 pour les petits retards et tend vers une constante positive pour les grands retards. D'où la justification des conclusions de [Ding et al. \(1993\)](#) d'absence de longue mémoire dans les rendements et de présence de longue mémoire dans les rendements absolus et les rendements carrés du S&P 500.

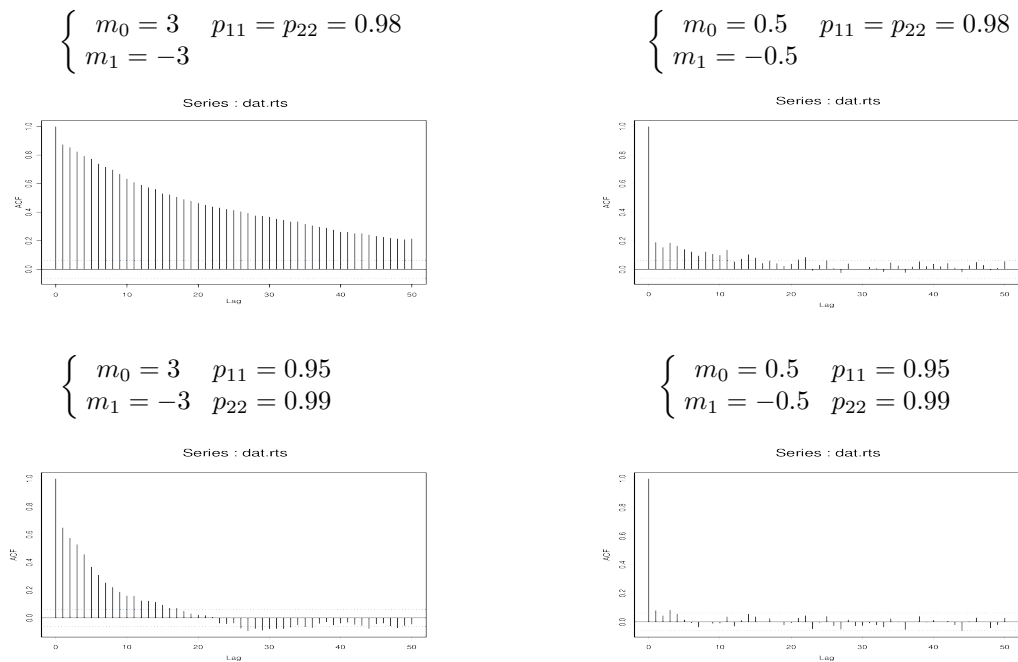
Dans la suite nous allons montrer par des méthodes pratiques que, le comportement de l'ACF des modèles à changement de régime peut être expliqué par la relation (24). Pour voir cette situation de près, nous allons simuler des processus à l'aide des modèles à changement de régime cités ci-dessus. On suppose dans tous les cas que le nombre de régime est égal à 2 et la taille de l'échantillon  $T = 1000$ .

### 3.1. ACF du modèle Markov

Suivant (4), le processus  $(X_t)_t$  change du niveau  $m_0$  vers le niveau  $m_1$  suivant la chaîne de Markov. Nous exposons à la Figure 5 le comportement de l'ACF de quelques séries issues du modèle (4).

Markov switching modèle est connu comme étant un modèle de courte mémoire, [Tong \(1990\)](#). Les Figures ci-dessus, à gauche, nous montrent par contre une décroissance lente de l'ACF. Cette décroissance lente d'après le changement au niveau de la moyenne du processus peut être expliquée par le second terme de la relation (24). Pour la Figure de bas sur la colonne droite, nous observons un comportement semblable à celui d'un processus courte mémoire, ARMA par exemple.

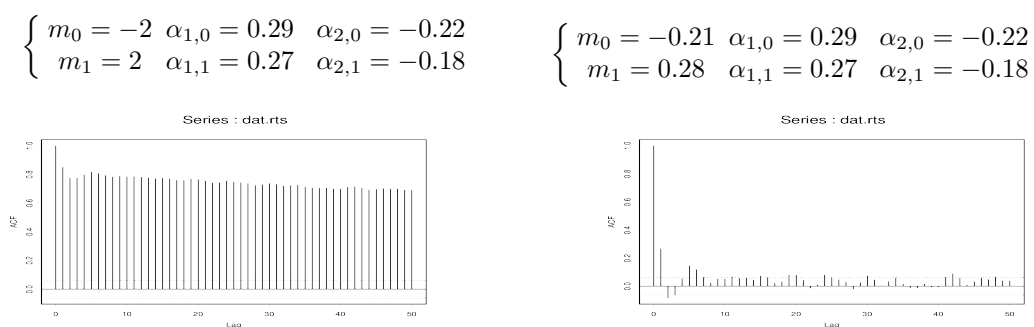
Ces résultats issues de la simulation nous indiquent que le comportement de l'ACF pour le modèle de Marov dépend du couple  $(p_{00}, p_{11})$  mais aussi de la différence  $(m_1 - m_0)$ . Quand  $p_{00} = p_{11}$  et s'approche de 1, l'ACF est similaire à celle d'un processus longue mémoire. Quand  $p_{00} \neq p_{11}$ , l'ACF se comporte comme celle d'un processus courte mémoire si  $|m_1 - m_0|$  est petit, elle ressemble à celle d'un processus longue mémoire si  $|m_1 - m_0|$  est grand.



**Fig. 5.** Différents comportements observés des fonctions d'autocorrélation des séries simulées issues du modèle (4).

### 3.2. ACF du modèle à rupture de structures

Ces modèles (9) permettent de changer de régime à un instant  $t = \tau$ . La Figure 6 illustre l'ACF du modèle pour les valeurs suivantes :



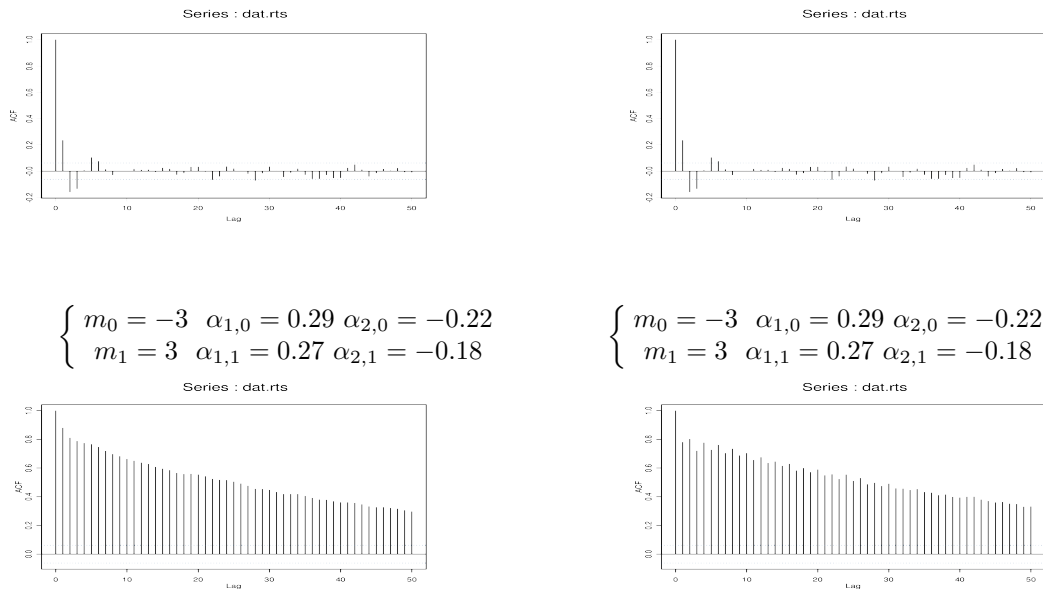
**Fig. 6.** Comportement des fonctions d'autocorrélation des processus issus du modèle (9).

Les Figures montrent que plus les moyennes en valeur absolue sont élevées, plus la décroissance de l'ACF est très lente. Le comportement se rapproche de celui d'un processus courte mémoire quand la moyenne en valeur absolue devient très petite.

### 3.3. ACF du modèle TAR et SETAR

Ce modèle permet de passer de la moyenne  $m_0$  à la moyenne  $m_1$  suivant la valeur prise par  $X_{t-d}$ . Les processus SETAR sont connus comme étant de courte mémoire. Mais il est possible aussi de montrer que l'ACF de ces processus décroît lentement vers zéro. La Figure 7 illustre l'ACF du modèle pour les valeurs suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_0 = -1 \quad \alpha_{1,0} = 0.29 \quad \alpha_{2,0} = -0.22 \\ m_1 = 1 \quad \alpha_{1,1} = 0.27 \quad \alpha_{2,1} = -0.18 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} m_0 = -1 \quad \alpha_{1,0} = 0.29 \quad \alpha_{2,0} = -0.22 \\ m_1 = 1 \quad \alpha_{1,1} = 0.27 \quad \alpha_{2,1} = -0.18 \end{array} \right.$$



**Fig. 7.** Comportements observés des fonctions d'autocorrélation des séries issues des modèles (11) et (13).

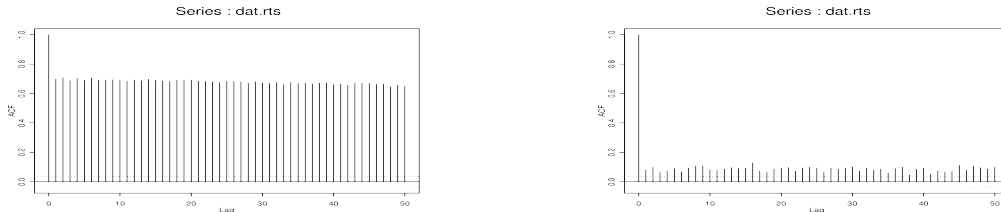
Au regard des Figures, on constate que le comportement de l'ACF des séries simulées décroît très lentement quand la moyenne en valeur absolue est petite, il est proche d'un comportement de mémoire courte quand la moyenne en valeur absolue devient plus grande.

### 3.4. ACF des modèles à rupture occasionnelles : le modèle mean plus noise et le modèle Stopbreak

Soit  $(X_t)_t$  le processus défini en (18) en (15)-(20). Le processus  $(X_t)_t$  permet de passer d'un état à un autre.

$$\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\eta^2 = 1, p = 0.25, T = 1000$$

$$\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\eta^2 = 1, \gamma = 100, T = 1000$$



**Fig. 8.** Comportement observé des fonctions d'autocorrélation de processus issus du modèle (18) et du modèle (15)-(20)

Ces Figures nous indiquent un comportement de l'ACF presque constant sur l'intervalle d'étude  $[0, T]$ .

La vitesse de décroissance vers zéro des fonctions d'autocorrélation des processus issus des modèles stationnaires avec changement structurels, cités ci-dessus, peut être trop lente (voir Figures) malgré que ces modèles soient théoriquement de courte mémoire. Les autocorrélations sont significatives pour les grands retards. Cette décroissance lente d'après les changements structurels peut être expliquée par le second terme de la relation (24). Ce qui semble être une caractéristique de l'ACF des modèles à changement de régime. Ce comportement de l'ACF caractéristique des processus longue mémoire, FARIMA par exemple, nous amène à penser, soit en la non stationnarité, soit en l'existence de la longue mémoire au niveau des séries.

#### 4. Détection de la longue mémoire : Tests et Estimation

##### 4.1. Processus Fractionnaires Intégrés

Plusieurs techniques ont été proposées pour estimer le paramètre de longue mémoire, à la fois dans le domaine temporel que fréquentiel (voir, par exemple, Beran, 1994). Nous considérons ici le processus fractionnaire intégré,  $I(d)$ , introduit par Granger et Joyeux (1980) et complété par Hosking (1981). Soit  $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  un processus de bruit blanc tel que  $E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$ . Le processus  $Y_t, t \geq 0$  est dit  $I(d)$  ou, de façon équivalente, suit un processus ARFIMA(0,  $d$ , 0) si:

$$(1 - L)^d Y_t = \varepsilon_t$$

où  $d$  est un nombre réel tel que  $|d| < \frac{1}{2}$ . Ce processus est stationnaire si  $d < \frac{1}{2}$  et inversible si  $d > -\frac{1}{2}$ . Dans la suite nous considérons le cas des processus ARFIMA(0,  $d$ , 0) avec  $d \in (0, \frac{1}{2})$  correspondant à la zone de persistance du processus.

#### 4.2. Les Tests

Dans cette partie, nous considérons trois tests pour vérifier l'hypothèse de changement structurel contre la dépendance longue mémoire. Le premier test concerne le test semi-paramétrique basé sur l'estimateur GPH. Les deux autres tests, utilisant les statistiques de Box-Pierce et Ljung-Box, sont basés sur l'étude de l'autocorrélation des résidus.

##### 4.2.1. Test de longue mémoire basée sur l'estimateur GPH

Pour un FARIMA( $p, d, q$ ), le test à effectuer est  $H_0 : d = 0$  contre  $H_1 : d \neq 0$ . D'après [Geweke et Porter-Hudak \(1983\)](#), la statistique :

$$\frac{1}{\pi} \sqrt{6 \sum_{j=1}^{k_T} (Z_j - \bar{Z})^2 \hat{d}_{GPH}}$$

est distribuée sous  $H_0$  suivant une loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ , où les  $Z_j$  sont données par

$$Z_j = -\ln\left(4 \sin^2\left(\frac{\lambda_j}{2}\right)\right), \quad j = 1, \dots, k_T$$

où  $k_T$ , défini dans la méthode d'estimation de Geweke et Porter-Hudak, correspond au nombre de fréquences considérées. Il représente la largeur de la bande sur laquelle on travaille.

##### 4.2.2. Test de corrélation : Statistiques de Box-Pierce et Ljung-Box

Pour vérifier la corrélation dans la série, nous utilisons ici les statistiques de Box-Pierce et Ljung-Box. La statistique de [Box et Pierce \(1970\)](#) est définie par

$$BP_K = T \sum_{k=1}^K \hat{\rho}^2(k) \tag{27}$$

où  $\hat{\rho}(k)$  est la fonction d'autocorrélation empirique,  $T$  est la taille de l'échantillon et  $K$  est le nombre de retards considérés.

[Ljung et Box \(1978\)](#) ont introduit une modification de la statistique de  $BP_K$  qui améliore l'approximation vers la distribution de  $\chi^2$  lorsque la taille de l'échantillon est petite. Celle-ci est définie par

$$LB_K = T(T + 2) \sum_{k=1}^K \frac{\hat{\rho}^2(k)}{T - k}.$$

Suivant ([Hosking, 1996](#), Théorème 7), quand  $0 < d < 1/4$ ,  $\hat{\rho}(k)$  admet une distribution limite normale standard avec une variance asymptotique d'ordre  $T^{-1}$  alors que quand  $d = 1/4$ ,  $\hat{\rho}(k)$  est asymptotiquement normale standard avec une variance asymptotique d'ordre  $T^{-1} \log(T)$ . Enfin, quand  $1/4 < d < 1/2$ ,  $\hat{\rho}(k)$  admet un comportement asymptotique nonstandard.

Dans le contexte d'un processus FARIMA, ils ont prouvé que cette statistique, sous l'hypothèse de non-corrélation des  $K$  premières valeurs de la série suit asymptotiquement une distribution de  $\chi^2$  avec  $K - p - q$  degrés de liberté, pour un grand  $K$ .

### 4.3. Les méthodes d'estimation

#### 4.3.1. Méthode R/S

Le coefficient de Hurst est indirectement l'un des paramètres qu'il faut estimer pour prévoir un modèle de type longue mémoire. Une fois le paramètre  $\hat{H}$  obtenu, on a :

$$\hat{d} = \hat{H} - \frac{1}{2}.$$

Pour une série  $(X_t)_{t=1,\dots,T}$  nous définissons sa moyenne et sa variance empirique

$$\bar{X}_T = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T X_i \text{ et } S_T^2 = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (X_i - \bar{X}_T)^2. \quad (28)$$

La statistique R/S de cette série, notée  $Q(T)$ , est alors donnée par l'équation suivante:

$$Q(T) = \frac{R(T)}{S_T},$$

où

$$R(T) = \max_{1 \leq k \leq T} \sum_{i=1}^k (X_i - \bar{X}_T) - \min_{1 \leq k \leq T} \sum_{i=1}^k (X_i - \bar{X}_T).$$

Nous avons pour un processus longue mémoire de paramètre  $d$ , la relation asymptotique suivante:

$$E[Q(T)] \sim cT^{d+\frac{1}{2}} \text{ lorsque } T \rightarrow \infty,$$

où  $c$  est une constante positive indépendante de  $T$ . Par passage aux logarithmes, on obtient alors la relation asymptotique suivante:

$$\log(E[Q(T)]) \sim \log(c) + H \log(T), \text{ où } H = d + \frac{1}{2}.$$

En pratique cette méthode se fait en plusieurs étapes:

- i) On détermine une suite finie d'entier  $(k_i)_{1 \leq i \leq m}$  de longueur  $m$ , choisie arbitrairement, telle que  $1 < k_m < \dots < k_1 \leq T$ , pour laquelle on utilise la suite définie par [Davies et Harte \(1987\)](#), telle que  $k_i = \lceil \frac{T}{i} \rceil$  pour  $i = 1, \dots, 6$ , et pour  $i = 7, 8, \dots, m$   $k_i = \lceil \frac{k_{i-1}}{1.15^i} \rceil$ .
- ii) Ensuite pour chaque  $k_i$ , on considère les sous-séries de la série initiale, de longueur  $k_i$ ; on détermine la statistique  $Q_j(k_i)$ , pour  $j = 1, \dots, l$ , où  $l$  est le nombre optimal de sous-séries de la série initiale.
- iii) Puis pour chaque  $k_i$ , on calcule  $E(Q(k_i)) = l^{-1} \sum_{j=1}^l Q_j(k_i)$ .
- iv) Enfin à partir des points ainsi obtenus se déterminent par la méthode des moindres carrés les estimateurs des coefficients  $a$  et  $b$  de la regression linéaire de  $\log(k_i)$  sur  $\log(E(Q(k_i)))$  pour  $(k_i)_{i=1,\dots,m}$ . Ce qui permet d'obtenir l'estimateur du coefficient de Hurst défini  $\hat{H} = \hat{b}$  et donc du paramère de longue mémoire  $d$ .

#### 4.3.2. Méthode de Lo

Lo (1991) a proposé une statistique R/S modifiée afin d'en améliorer la robustesse en présence d'une composante courte mémoire. Cette méthode est en fait un test de l'hypothèse  $H_0$ : " $(X_t)$  est un processus à mémoire longue" contre l'hypothèse  $H_1$ : " $(X_t)$  n'est pas un processus à mémoire longue". La statistique R/S modifiée de Lo est donnée par la relation suivante :

$$V_q(T) = \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{R(T)}{S_q(T)}, \quad (29)$$

où  $R(T)$  a la même expression que dans la méthode R/S pour  $n = T$  et la statistique  $S_q(T)$  est donnée par:

$$S_q(T) = \sqrt{s_T^2 + \frac{2}{T} \sum_{j=1}^q w_j(q) \left[ \sum_{i=j+1}^T (X_i - \bar{X}_T)(X_{i-j} - \bar{X}_T) \right]}, \text{ avec } w_j(q) = 1 - \frac{j}{q+1},$$

$\bar{X}_T$  et  $s_T^2$  sont respectivement la moyenne et la variance empiriques définies en (28).

Dans la pratique le choix de l'entier  $q$  représente un problème sérieux. Lo (1991) et Willinger *et al.* (1999) ont démontré la propriété asymptotique suivante:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P(V_q(T) \in [0.809, 1.862]) = 0.95.$$

Lo utilise alors  $I = [0.809, 1.862]$  comme intervalle de confiance asymptotique au seuil de 5% pour le test de l'hypothèse  $H_0$  contre l'hypothèse  $H_1$ .

#### 4.3.3. La méthode de Geweke et Porter-Hudak GPH

La méthodologie de Geweke et Porter-Hudak (1983) ou "méthode de régression" fournit une estimation du paramètre de différenciation  $d$  dans le domaine spectral. Ainsi, sous certaines hypothèses, voir Geweke et Porter-Hudak (1983), l'estimateur GPH du paramètre  $d$ , noté  $\hat{d}_{GPH}$  s'obtient alors en ajustant la régression linéaire spectrale simple suivante,

$$\log I_T(\lambda_j) = a + dZ_j + \varepsilon_j, \quad j = 1, \dots, k_T \quad (30)$$

où

$$Z_j = -\log\left(4\sin^2\left(\frac{\lambda_j}{2}\right)\right), \quad (31)$$

et où les  $\lambda_j = \frac{2\pi j}{T}$  pour  $j = 0, \dots, T-1$ , représentent les fréquences de Fourier,  $T$  est la taille de l'échantillon, et  $k_T = g(T) \ll T$  le nombre de fréquences considérées représente la largeur de bande sur laquelle on travaille. On estime le paramètre  $d$  par la méthode des moindres carrés ordinaires. L'estimateur GPH de  $d$  est le coefficient de la pente dans la régression des moindres carrés de  $\log I_T(\lambda_j)$  sur la constante  $a$  et sur  $Z_j$ . Ainsi l'expression de l'estimateur GPH, noté  $\hat{d}_{GPH}$ , est donnée par:

$$\hat{d}_{GPH} = \frac{\sum_{j=1}^{k_T} (Z_j - \bar{Z}) \log(I_T(\lambda_j))}{\sum_{j=1}^{k_T} (Z_j - \bar{Z})^2} \quad \text{avec } \bar{Z} = \frac{1}{k_T} \sum_{i=1}^{k_T} Z_i.$$

En supposant que  $k_T$  est choisi tels que  $\lim_{T \rightarrow \infty} g(T) = \infty$ ,  $\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{g(T)}{T} \right\} = 0$ , et



$\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(T)^2}{g(T)} \right\} = 0$ , Geweke et Porter-Hudak (1983) ont établi la consistance et la normalité asymptotique de l'estimateur  $\hat{d}_{GPH}$ , lorsque  $d < 0$ , alors que Robinson (1995) a prouvé la consistance pour  $d \in (0, 0.5)$ .

#### 4.3.4. La méthode de Robinson

Robinson (1995) a amélioré la régression du log-périodogramme. Ainsi il a proposé un estimateur asymptotiquement non biaisé du paramètre de longue mémoire  $d$ , contrairement à la méthode GPH où l'estimateur présente un biais asymptotique. L'estimateur, noté par  $\hat{d}_R(l, m)$  en utilisant les mêmes notations que pour la méthode de Geweke et Porter-Hudak, a pour expression:

$$\hat{d}_R(l, m) = \frac{\sum_{j=l+1}^m (Z_j - \bar{Z}) \log I_T(\lambda_j)}{\sum_{j=l+1}^m (Z_j - \bar{Z})^2}, \quad 0 \leq l < m < T \quad (32)$$

avec

$$\bar{Z} = \frac{1}{m-l} \sum_{i=l+1}^m Z_i. \quad (33)$$

où  $m$  est défini de la même manière que  $k_T$  dans la méthode de Geweke et Porter-Hudak, le nombre  $l$  correspond au nombre de basses fréquences qui ont été retrancées de l'équation de régression (30).

#### 4.3.5. La méthode locale exacte de Whittle (ELW)

La méthode proposée par Shimotsu et Phillips (2005) est construite à partir du périodogramme et elle nécessite la connaissance de la fonction de densité spectrale. Considérons un processus intégré  $X_t$  généré par le modèle

$$\Delta^d X_t = (1-L)^d X_t = \sum_{k=0}^t \frac{(-d)^k}{k!} X_{t-k}, \quad t = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

Shimotsu et Phillips (2005) définissent l'estimateur ELW comme suit

$$\hat{d} = \arg \min_{d \in [d_1, d_2]} R(d)$$

où  $d_1$  et  $d_2$  sont respectivement les bornes inférieures et supérieures de la valeur admissible de  $d$  et

$$R(d) = \log \hat{G}(d) - 2d \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \log \lambda_j,$$

$$\hat{G}(d) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m I_{\Delta^d x}(\lambda_j), \quad \lambda_j = \frac{2\pi j}{T}, \quad j = 0, \dots, T, \quad \frac{m}{T} \rightarrow 0,$$

où  $m$  est un entier plus petit que  $T$ .

$$I_{\Delta^d x}(\lambda) = \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{t=1}^n \Delta^d X_t e^{it\lambda} \right|^2$$

représente le périodogramme de  $\Delta^d X_t$ . Soit  $d_0$  représentant la vraie valeur de  $d$ , suivant Robinson (1995), l'estimateur ELW  $\hat{d}$  est consistant et asymptotiquement distribué pour tout  $d_0 \in (d_1, d_2)$  si  $d_2 - d_1 \leq \frac{1}{2}$  et il satisfait

$$\sqrt{m}(\hat{d} - d_0) \xrightarrow{d} N(0, \frac{1}{4}) \text{ quand } T \rightarrow \infty \quad (34)$$

#### 4.3.6. La méthode d'ondelette

Lee (2005) a proposé un estimateur par ondelette pour le paramètre de longue mémoire  $d$ . Cette méthode permet d'estimer  $d$  à l'intérieur de l'intervalle  $(0, 1.5)$ . La valeur estimée  $\hat{d}_{Wave}$  de  $d$  est obtenue par application de la méthode des moindres carrés utilisant la régression suivante :

$$\log(I^j(\lambda_q)) = c - 2(d - 1) \ln(\lambda_q) + \varepsilon_t, \text{ pour } q = 1, 2, \dots, m$$

où,  $c$  est une constante,  $\lambda_q = \frac{2\pi q}{T}$  et

$$I^j(\lambda_q) = \frac{1}{2\pi T} \sum_{k=0}^{2^j-1} |W_X(j, k) e^{i\lambda_q k}|^2, q = 1, 2, \dots, m.$$

Le nombre de fréquences  $m$  est tel que  $\frac{m}{T} \rightarrow 0$  quand  $T \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned} W_X(j, k) &= \sum_t X_t \psi_{jk}(t), (j, k) \in Z^2 \\ &= \frac{1}{2^{j/2}} \sum_t X_t \psi(2^{-j}t - k), (j, k) \in Z^2 \end{aligned}$$

est la transformée en ondelette d'une série  $X_t, t = 1, \dots, T = 2^j - 1$ . Les coefficients d'ondelette,  $W_X(j, k)$ , représente donc la contribution de l'échelle  $j$  aux différentes positions temporelles  $k$ . Les fonctions  $\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k)$  sont appelées transformés de l'ondelette  $\psi$ , appelée ondelette mère. Nous utilisons dans ce papier, l'ondelette de Haar, défini comme suit :

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'estimateur,  $\hat{d}_{Wave}$ , est explicitement défini par l'égalité suivante :

$$-2(\hat{d}_{Wave} - 1) = \frac{\sum_{q=1}^m (Z_q - \bar{Z}) \ln(I^j(\lambda_q))}{\sum_{q=1}^m (Z_q - \bar{Z})^2}, \text{ où } Z_q = \ln(\lambda_q).$$

En utilisant cette approche nous obtenons, pour  $d \in (0, 1.5)$ ,

$$\sqrt{m}(\hat{d}_{Wave} - d) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{\pi^2}{24}\right) \text{ quand } T \rightarrow \infty.$$

## 5. Simulation

Dans cette section, nous effectuons des simulations de Monte-Carlo, d'une part, pour examiner la puissance des tests présentés à la Section 4, et d'autre part pour évaluer la performance des estimateurs listés à la même Section que celle des tests. Nous avons utilisé le logiciel Splus qui réalise ce type de calcul de manière automatique. Les modèles suivants sont ceux que nous considérons dans les simulations.

1.  $DGP_1$  : Modèle Markov à changement de régime : avec  $\sigma_\varepsilon^2 = (0.05, 0.1, 0.5, 1)$  et avec des couples de vecteurs de probabilité  $(p_{11}, p_{22}) = ((0.5, 0.98), (0.95, 0.98), (0.98, 0.98), (0.99, 0.99), (0.999, 0.999))$ .
2.  $DGP_2$  : Modèle à rupture de structure (Structural break model): avec  $T = 2000$ ,  $\sigma_\varepsilon = (0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1)$  et un changement de régime intervenant à l'instant  $\tau = (250, 500, 1000, 1500, 1750)$ .
3.  $DGP_3$  : Modèles TAR et SETAR : avec  $\sigma_\varepsilon^2 = (0.05, 0.08, 0.1, 0.3, 0.5, 1)$ , un paramètre de retard  $h = 1$  (TAR),  $h = (2, 3, 4)$  (SETAR), un paramètre de seuil  $c = 0$ .
4.  $DGP_4$  : Mean plus noise model: avec  $\sigma_\varepsilon^2 = 1$ ,  $\sigma_\eta^2 = (0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1)$ , et  $p = (0.001, 0.005, 0.01, 0.05, 0.1, 0.25, 0.5)$ .
5.  $DGP_5$  : STOPBREAK Model: avec  $\sigma_\eta^2 = 1$ ,  $\sigma_\varepsilon^2 = (0.05, 0.1, 0.5, 1)$  et  $\gamma = (0.01, 0.1, 1, 10, 100, 1000)$ .
6.  $DGP_6$  :  $I(d)$  modèle: avec  $d = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.45$  et  $\sigma_\varepsilon = 1$ .

Après la simulation d'une série,  $X_t$ , provenant de chacun des  $DGP_s$ , nous effectuons les tests de vérification de présence de mémoire longue. En considérant  $DGP_s$ ,  $s = 1, \dots, 5$ , le test est conduit sous  $H_0$  tandis que quand on considère  $DGP_6$  l'expérience est réalisée sous  $H_1$ , et une estimation de la puissance est fournie. Les tailles des échantillons  $T = 200, 600, 800$  et  $1000$  sont considérées et le nombre de replications est  $M = 1000$ .

Tableau 1 fournit les fréquences empiriques de rejet des trois tests statistiques cités en Section 4. Elles sont obtenues sous  $H_0 : d = 0$  (i.e sous hypothèse nulle de changement structurels) et sont basées sur  $\alpha = 5\%$  de valeurs critiques de la distribution asymptotique correspondante. La puissance des trois tests sur le Tableau 1 est aussi obtenue, en supposant  $DGP_6$  est réalisé sous  $H_1$ . Pour évaluer la performance en terme de taille et de puissance des tests, les valeurs  $K = 4, 5$  sont considérées pour les tailles d'échantillon  $T = 200, 600$ , respectivement (c'est à dire,  $K \sim T^{\frac{1}{4}}$ ) et les valeurs  $K = 9, 10$  sont considérées pour les tailles d'échantillons  $T = 800, 1000$  respectivement (c'est à dire,  $K \sim T^{\frac{1}{3}}$ ). Pour  $\alpha = 0.05$  et pour  $K = 4, 5, 9$ , et  $10$ , les seuils critiques sont, respectivement,  $\chi_{0.95}^2(4) = 9.488$ ,  $\chi_{0.95}^2(5) = 11.070$ ,  $\chi_{0.95}^2(9) = 16.92$  et  $\chi_{0.95}^2(10) = 18.307$ .

### 5.0.7. Test de Changement Structurel contre Longue Mémoire

Sur le Tableau, on observe, pour  $DGP_1$ , que les résultats empiriques sont proches du seuil nominal et décroissent pour  $p_{11} = p_{22} = 0.95$ , ce qui est en phase avec le modèle Markov qui est un  $I(0)$ . Par contre pour tous les autres cas, particulièrement pour le cas  $p_{11} = p_{22} = 0.99$  les fréquences de rejet croissent avec  $T$ . Ceci est non consistant avec le fait que le modèle Markov soit un  $I(0)$  pour tout  $p_{11}$  et  $p_{22}$  fixés. Mais si, nous incluons un  $T$  plus grand, par exemple  $T > 10000$ , nous verrons éventuellement une décroissance des fréquences de rejet. Pour  $DGP_2$  et  $DGP_3$ , nous observons que tous les tests fournissent des fréquences

		T = 200			T = 600			T = 800			T = 1000		
		BP <sub>K</sub>	LB <sub>K</sub>	GPH	BP <sub>K</sub>	LB <sub>K</sub>	GPH	BP <sub>K</sub>	LB <sub>K</sub>	GPH	BP <sub>K</sub>	LB <sub>K</sub>	GPH
DGP <sub>1</sub>	(p <sub>11</sub> , p <sub>22</sub> )=(0.5, 0.98)	4.95	5.27	2.10	5.05	4.90	2.13	5.34	5.46	2.14	5.75	5.82	2.21
	(p <sub>11</sub> , p <sub>22</sub> )=(0.95, 0.95)	4.83	5.09	2.33	4.62	4.65	2.27	4.19	4.25	2.13	3.57	3.61	2.01
	(p <sub>11</sub> , p <sub>22</sub> )=(0.95, 0.98)	4.91	5.08	2.12	5.12	5.61	2.44	5.27	5.63	2.48	5.57	6.01	2.52
	(p <sub>11</sub> , p <sub>22</sub> )=(0.98, 0.98)	5.05	5.28	2.24	5.47	5.32	2.57	5.62	5.65	2.68	5.78	5.81	2.72
	(p <sub>11</sub> , p <sub>22</sub> )=(0.99, 0.99)	5.70	5.39	2.40	5.96	5.78	2.63	6.01	5.85	3.06	6.11	5.93	3.26
DGP <sub>2</sub>	τ = 100	97.0	97.3	16.9	100	100	36.2	100	100	38.6	100	100	39.8
	τ = 400	/	/	/	100	100	51.3	100	100	62.8	100	100	66.8
	τ = 500	/	/	/	100	100	58.4	100	100	63.3	100	100	68.3
	τ = 800	/	/	/	/	/	/	/	/	/	100	100	72.5
DGP <sub>3</sub>	h = 1	98.6	98.7	79.9	100	100	86.5	100	100	86.7	100	100	87.3
	h = 2	97.4	97.5	96.3	100	100	99.9	100	100	99.9	100	100	100
	h = 3	98.8	98.9	97.6	100	100	99.9	100	100	100	100	100	100
	h = 4	99.8	99.8	97.6	100	100	99.9	100	100	100	100	100	100
DGP <sub>4</sub>	p = 0.001	4.73	4.81	2.51	5.10	5.21	2.95	5.03	5.31	3.10	5.59	5.77	4.17
	p = 0.005	5.56	5.61	5.64	7.86	6.01	6.94	6.03	6.28	7.03	8.53	8.17	10.6
	p = 0.01	5.10	5.08	5.74	6.47	6.53	6.84	7.53	7.65	7.51	8.35	8.77	9.27
	p = 0.05	5.33	5.39	5.53	6.74	6.75	6.40	7.50	7.74	7.73	8.51	8.63	9.19
	p = 0.1	7.56	7.60	5.98	7.98	7.98	6.84	8.02	8.24	7.85	8.14	8.35	8.87
	p = 0.5	9.12	9.15	9.19	9.27	9.32	9.21	9.31	9.43	9.46	9.67	9.71	9.72
DGP <sub>5</sub>	γ = 0.01	100	100	97.9	100	100	100	100	100	100	100	100	100
	γ = 0.1	100	100	97.5	100	100	100	100	100	100	100	100	100
	γ = 1	100	100	96.6	100	100	100	100	100	100	100	100	100
	γ = 10	85.8	86.2	72.6	99.9	99.9	99.4	100	100	100	100	100	100
	γ = 100	5.30	5.72	4.56	19.4	19.6	17.0	37.2	38.6	36.7	50.9	51.2	54.4
	γ = 1000	4.93	5.12	4.37	5.26	5.47	4.52	5.49	5.52	4.65	5.56	5.86	4.73
DGP <sub>6</sub>	d = 0.1	24.5	23.9	11.6	65.5	66.5	26.4	73.6	73.9	31.4	82.6	82.9	36.9
	d = 0.2	78.6	79.6	37.7	99.8	99.8	85.5	100	100	84.5	100	100	89.8
	d = 0.3	98.4	98.6	70.5	100	100	97.4	100	100	99.2	100	100	99.7
	d = 0.4	99.9	99.9	91.3	100	100	99.9	100	100	99.9	100	100	99.9
	d = 0.45	100	100	95.8	100	100	100	100	100	100	100	100	100

**Table 1.** Fréquence de rejet et Puissance empirique des tests au niveau  $\alpha = 5\%$

empiriques de rejet considérables. Pour  $DGP_4$ , les fréquences de rejets s'accroissent avec  $T$  et  $p$  tout en restant proche du seuil nominal pour  $p$  proche de 0, c'est le cas pour  $p = 0.001$ .

Ces résultats semblent être consistant avec le modèle "mean plus noise" qui est approximativement un  $I(1)$  quant  $p > 0$  et un processus longue mémoire quand  $p$  tend 0 et  $T$  tendant vers l'infini, d'après les résultats théoriques de Granger et Hyung (2000). Contrairement, pour le  $DGP_5$ , les fréquence de rejet croissent avec  $T$  et décroissent avec  $\gamma$ , elles sont très importante pour les petites valeurs de  $\gamma$  et s'approchent du seuil nominal pour un  $\gamma$  élevé et une taille d'échantillon  $T$  petite. D'après Engle et Smith (1999), le processus STOPBREAK se comporte comme un  $I(1)$  pour tout  $\gamma < \infty$  et un  $I(0)$  pour tout  $\gamma$  tendant vers  $\infty$ , d'où la consistance des résultats avec la théorie du modèle. En ce qui concerne la puissance, tous les tests ont de bon résultats, sauf quand  $d$  prend de petites valeurs, pour  $T = 200$ , et quand  $d$  prend de petites valeurs avec le test GPH, pour tout  $T$ . Ceci n'est pas surprenant puisque quand  $d$  est petit il est considérablement difficile de faire la distinction entre la longue mémoire et la courte mémoire, même pour le plus commun des procédures testant la longue mémoire.

Pour estimer le paramètre longue mémoire  $d$ , nous utilisons les estimateurs listés à la Section 4.

Modèle Markov à changement de régime : avec  $T = 2000, \sigma_\varepsilon^2 = (0.05, 0.1, 0.5, 1)$  et avec des couples de vecteurs de probabilité  $(p_{11}, p_{22}) = ((0.5, 0.98), (0.95, 0.95), (0.95, 0.98), (0.98, 0.98), (0.99, 0.99))$ .

Modèle à rupture de structure (Structural break model) : avec  $T = 2000, \sigma_\varepsilon = (0.05, 0.1, 0.5, 1)$  et un changement de régime intervenant à l'instant  $\tau = (250, 500, 1000, 1500, 1750)$ .

$\sigma_\varepsilon^2$	$(p_{00}, p_{11})$	(0.5, 0.98)	(0.95, 0.95)	(0.95, 0.98)	(0.98, 0.98)	(0.99, 0.99)
0.05	$d_H$	0.0487	0.0554	0.0977	0.1259	0.2327
	$d_{Lo}$	1.5303	3.5353	4.0601	5.0895	6.5067
	$d_{GPH}$	0.0062	0.2504	0.3591	0.5429	0.7453
	$d_R$	0.0098	0.4482	0.5942	0.8037	0.9256
	$d_{ELW}$	0.7351	0.7391	0.7724	0.7466	0.7578
	$d_{W_{ave}}$	0.0266	0.1245	0.4678	0.3092	0.5371
0.1	$d_H$	0.0472	0.0589	0.0982	0.1261	0.2668
	$d_{Lo}$	1.5223	3.4966	4.0537	5.0821	6.5685
	$d_{GPH}$	0.0064	0.2443	0.3589	0.5423	0.7496
	$d_R$	0.0102	0.4331	0.5936	0.8026	0.9380
	$d_{ELW}$	0.7303	0.7256	0.7681	0.7194	0.7582
	$d_{W_{ave}}$	0.0413	0.1254	0.4733	0.3092	0.5338
0.5	$d_H$	0.0076	0.0587	0.1008	0.1275	0.2436
	$d_{Lo}$	1.2040	3.4754	4.0021	5.0245	6.4863
	$d_{GPH}$	-0.0021	0.2448	0.3566	0.5404	0.7526
	$d_R$	-0.0098	0.4251	0.5880	0.7982	0.9264
	$d_{ELW}$	0.7504	0.8087	0.7567	0.7355	0.6826
	$d_{W_{ave}}$	0.0741	0.1472	0.4671	0.3023	0.5002
1	$d_H$	0.0285	0.0686	0.1031	0.1293	0.2821
	$d_{Lo}$	1.4393	3.4608	3.9397	4.9559	6.3509
	$d_{GPH}$	0.0022	0.2393	0.3541	0.5371	0.7343
	$d_R$	0.0079	0.4195	0.5825	0.7919	0.9117
	$d_{ELW}$	0.7746	0.7474	0.7131	0.6767	0.7267
	$d_{W_{ave}}$	0.0824	0.1504	0.5017	0.2896	0.5097

**Table 2.** Modèle Markov à changement de régime,  $T = 2000$  : résultats d'estimation de  $d$ .

Modèle TAR: avec  $T = 2000$ ,  $\sigma_\varepsilon^2 = (0.05, 0.08, 0.1, 0.3, 0.5, 1)$ , un paramètre de retard  $h = 1$ , un paramètre de seuil  $c = 0$ .

Modèle SETAR: avec  $T = 2000$ ,  $\sigma_\varepsilon^2 = (0.05, 0.08, 0.1, 0.5, 1)$ , un paramètre de retard  $d = (2, 3, 4)$ , un paramètre de seuil  $c = 0$ .

Les modèles à rupture occasionnelle (Occasionals Breaks models): avec  $T = 2000$ ,  $\sigma_\varepsilon^2 = 1$ ,  $\sigma_\eta^2 = (0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1)$  et  $p = (0.001, 0.005, 0.01, 0.05, 0.1, 0.25, 0.5)$ .

STOPBREAK Model: avec  $\sigma_\eta^2 = 1$ ,  $\sigma_\varepsilon^2 = (0.05, 0.1, 0.5, 1)$  et  $\gamma = (0.01, 0.1, 1, 10, 100)$ .

FARIMA(0,d,0): avec  $T = 200, 600, 800, 1000, 2000$  et  $d = (0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.45)$ .

Nos résultats d'estimation du paramètres de longue mémoire  $d$  sont présentés sur les Tableaux 2-8. Sur le Tableau 2, nous remarquons que lorsque  $p_{00}$  et  $p_{11}$  s'éloignent de 1, par exemple lorsque  $(p_{00}, p_{11}) = (0.5, 0.98)$ , la valeur estimée de  $d$ , par toutes les méthodes d'estimation, exceptée la méthode de *ELW*, est un  $\hat{d}$  proche de zéro quelque soit  $\sigma_\varepsilon$ . Ces observations sont consistantes avec la théorie sur le modèle Markov, d'après [Timmermann \(2000\)](#). Lorsque  $p_{00}$  et  $p_{11}$  s'approchent de 1, avec  $p_{00} = p_{11} \geq 0.98$ , la valeur estimée  $\hat{d}$  devient supérieur à  $\frac{1}{2}$ . Quant à la méthode Hurst, elle fournit dans tous les cas un  $\hat{d} < \frac{1}{2}$ , tandis que pour la méthode *ELW*, un  $\hat{d} > \frac{1}{2}$  est obtenu quelque soit  $\sigma_\varepsilon$  et  $(p_{00}, p_{11})$ . Ces résultats montrent que la valeur de  $\hat{d}$  dépend du couple  $(p_{00}, p_{11})$ . Ce comportement de  $\hat{d}$ , c'est à dire

$\sigma_\varepsilon^2$	$\tau$	250	500	1000	1500	1750
0.01	$d_H$	1.1379	3.6994	5.1801	1.1825	0.9839
	$d_{Lo}$	9.6797	11.176	15.803	13.684	10.448
	$d_{GPH}$	0.9926	0.7645	0.6546	0.9249	1.0442
	$d_R$	0.8530	0.5489	0.5348	0.7878	0.7579
	$d_{ELW}$	0.7161	0.7121	0.7801	0.8547	0.7978
	$d_{Wave}$	0.9451	0.7765	0.4218	0.7580	0.9115
0.05	$d_H$	1.1351	1.1776	4.1620	1.1798	0.9769
	$d_{Lo}$	9.6431	13.633	15.757	13.632	10.380
	$d_{GPH}$	0.9623	0.9071	0.6401	0.9074	1.0181
	$d_R$	0.8434	0.7923	0.5416	0.7924	0.7704
	$d_{ELW}$	0.8064	0.7147	0.6658	0.7064	0.7454
	$d_{Wave}$	0.8238	0.7318	0.3813	0.6919	0.8048
0.5	$d_H$	1.1063	1.1508	4.0882	1.1521	0.9105
	$d_{Lo}$	9.2591	13.090	15.275	13.082	9.6977
	$d_{GPH}$	0.9159	0.8776	0.6184	0.8791	0.9603
	$d_R$	0.8225	0.7897	0.6938	0.7927	0.7482
	$d_{ELW}$	0.7964	0.7326	0.6986	0.7535	0.8501
	$d_{Wave}$	0.5108	0.4857	0.2805	0.4448	0.4727
1	$d_H$	0.8553	1.1262	6.0165	1.1268	0.8559
	$d_{Lo}$	9.1036	12.558	14.788	12.544	9.0815
	$d_{GPH}$	0.9169	0.8556	0.6090	0.8578	0.9181
	$d_R$	0.6946	0.7624	0.6030	0.7673	0.6954
	$d_{ELW}$	0.8162	0.7582	0.6911	0.7592	0.7774
	$d_{Wave}$	0.4009	0.3889	0.2229	0.3547	0.3732

**Table 3.** Modèle à rupture de structure : résultats d'estimation de  $d$ .

$\sigma_\varepsilon^2$	0.05	0.08	0.1	0.3	0.5	1
$d_H$	0.0169	0.0204	0.0484	0.1919	0.0657	0.0375
$d_{Lo}$	1.4482	1.4815	1.7415	7.8837	4.6269	2.9331
$d_{GPH}$	-0.0001	0.0031	0.0253	0.7068	0.3345	0.0782
$d_R$	0.0051	0.0079	0.0269	0.8741	0.5122	0.1334
$d_{ELW}$	0.7736	0.8084	0.8089	0.7903	0.7612	0.8016
$d_{Wave}$	-0.0355	0.0938	0.3712	0.4005	0.6254	0.0625

**Table 4.** Modèle TAR: résultats d'estimation de  $d$ .

tantôt proche de 0 tantôt proche de 1, semble être sujet à de nombreux changements entre les deux régimes.

Tableau 3 montre que la statistique de  $Lo$  se trouve en dehors de l'intervalle de confiance asymptotique  $[0.809, 1.862]$  quelque soit  $(\sigma_\varepsilon, \tau)$ , ce qui permet de conclure à la présence de dépendance de long terme dans la série, au risque  $\alpha = 0.05$ . Par contre, toutes les méthodes d'estimation, à l'exception de celle des ondelettes, rejettent la longue mémoire.

Le Tableau 4 montre que pour  $\sigma_\varepsilon \in [0.05, 0.1]$ , les différentes méthodes d'estimation, exceptée la méthode  $ELW$ , fournissent un  $\hat{d}$  proche de zéro. Pour  $\sigma_\varepsilon \in [0.3, 1]$ , ces mêmes méthodes d'estimation fournissent des valeurs de  $\hat{d}$  qui ne nous permettent pas de rejeter la présence

h	$\sigma_\varepsilon^2$	0.05	0.08	0.1	0.5	1
2	$d_H$	0.0162	0.2784	0.6010	0.0665	0.0311
	$d_{Lo}$	1.2273	3.4403	6.4692	3.7636	2.5925
	$d_{GPH}$	0.0055	0.2228	0.5067	0.2085	0.0547
	$d_R$	0.0077	0.2299	0.5230	0.3437	0.1010
	$d_{ELW}$	0.7104	0.7216	0.7476	0.7281	0.6558
	$d_{W_{ave}}$	-0.0035	0.1797	0.2451	0.3027	0.0979
3	$d_H$	0.0154	0.3355	0.6526	0.0814	0.0497
	$d_{Lo}$	1.2208	3.8468	6.9759	3.7180	2.5941
	$d_{GPH}$	0.0053	0.2602	0.5783	0.2953	0.1079
	$d_R$	0.0073	0.2534	0.5615	0.4696	0.1827
	$d_{ELW}$	0.6602	0.7185	0.7398	0.7491	0.7405
	$d_{W_{ave}}$	-0.0355	0.2370	0.2572	0.3762	0.1389
4	$d_H$	0.0124	0.3236	0.5354	0.0939	0.0593
	$d_{Lo}$	1.1914	2.9905	4.7847	2.8624	2.2403
	$d_{GPH}$	0.0078	0.3501	0.6379	0.3366	0.1596
	$d_R$	0.0042	0.3601	0.6770	0.5154	0.2526
	$d_{ELW}$	0.7403	0.7519	0.7384	0.7273	0.7468
	$d_{W_{ave}}$	-0.0355	0.1764	0.5521	0.4554	0.2003

**Table 5.** Modèle SETAR : résultats d'estimation de  $d$ .

de longue mémoire du processus TAR. Pour la méthode  $ELW$ , la valeur estimée de  $d$  est significativement différente de zéro,  $\hat{d}_{ELW} > \frac{3}{4}$ , quelque soit  $\sigma_\varepsilon$ . Ce qui, en accord avec la théorie sur l'estimateur de Whittle, rejette l'existence de la longue mémoire, voir [Shimotsu et Phillips \(2005\)](#). Au vu de ces résultats, nous constatons que la forme de persistance observée est sujette aux changements au niveau de la volatilité non conditionnelle. Le Tableau 5 montre que pour  $\sigma_\varepsilon = 0.05$ , comme dans le cas de l'estimation du paramètre  $d$  avec le modèle TAR, un  $\hat{d}$  proche de zéro est obtenu. Tandis que dans la plupart des autres cas, les estimations fournissent un  $\hat{d} \in (0, 0.5)$  laissant penser qu'il y'a la présence de longue mémoire. Pour la méthode  $ELW$ , le modèle SETAR se comporte comme un modèle non-stationnaire de longue mémoire quelque soit  $\sigma_\varepsilon$ .

Le Tableau 6 montre que le paramètre  $\hat{d}$  dépend de  $\sigma_\eta$  et de  $p$ . En effet quand le couple  $(\sigma_\eta, p)$  s'approche de  $(0, 0)$ , la méthode de GPH, la méthode de Robinson et la méthode d'ondelette fournissent un  $\hat{d} \in (0, 0.5)$ . Quand le couple  $(\sigma_\eta, p)$  s'approche de  $(1, 0.5)$ , nous obtenons en général un  $\hat{d} > \frac{1}{2}$  pour toutes les méthodes.

Ce résultat sur l'estimation de  $d$  est consistant avec la théorie sur le comportement de l'ACF du modèle à rupture occasionnelle, [Granger et Hyung \(2000\)](#). Dans le Tableau 7, nous reportons les valeurs de  $\hat{d}$ . Le paramètre  $\hat{d} \in [0, \frac{1}{2}]$  pour  $\gamma$  élevé par la technique GPH et la méthode de Robinson  $\forall \sigma_\varepsilon$  et pour un  $\sigma_\varepsilon$  petit par la méthode de Hurst. Par exemple pour  $\gamma = 100, \sigma = 0.05$  nous obtenons  $\hat{d}_H = 0.0572, \hat{d}_{GPH} = 0.0285, \hat{d}_R = 0.0068, \hat{d}_{W_{ave}} = 0.0281$ . Pour les autres cas  $\hat{d}$  est dans l'intervalle  $[\frac{1}{2}, 1]$  et est proche de 1, d'où la consistance des observations avec la théorie du modèle car le processus STOPBREAK est un  $I(1)$  pour tout  $\gamma < \infty$  selon [Engle et Smith \(1999\)](#).

$\sigma_\eta^2$	$p$	0.001	0.005	0.01	0.05	0.1	0.25	0.5
0.01	$d_H$	0.1961	0.5187	0.6103	0.7387	0.7821	0.7506	0.7013
	$d_{Lo}$	1.5824	2.4984	3.1588	5.8106	7.3177	8.9676	10.135
	$d_{GPH}$	0.0579	0.1792	0.2541	0.4859	0.6010	0.7355	0.8240
	$d_R$	0.0126	0.0397	0.0709	0.2667	0.3931	0.5809	0.7112
	$d_{ELW}$	0.7488	0.7786	0.7863	0.7503	0.7457	0.7515	0.7563
	$d_{W_{ave}}$	0.0971	0.1037	0.1201	0.2623	0.3554	0.6483	0.6848
0.05	$d_H$	0.4240	0.4967	0.3654	0.9794	0.6486	0.6876	0.4631
	$d_{Lo}$	2.3592	3.3436	3.0576	9.7651	10.802	10.145	9.8032
	$d_{GPH}$	0.1498	0.4132	0.4230	0.7297	0.8378	0.9517	0.9285
	$d_R$	0.0446	0.0765	0.0904	0.4645	0.4914	0.5084	0.5631
	$d_{ELW}$	0.7663	0.6983	0.7354	0.8497	0.7813	0.8227	0.7206
	$d_{W_{ave}}$	0.1779	0.3640	0.3868	0.6085	0.5985	0.8259	0.8461
0.1	$d_H$	0.7484	0.6050	0.4312	0.9196	0.5563	0.6048	0.4324
	$d_{Lo}$	2.2945	4.4729	4.3017	10.686	11.276	10.542	10.227
	$d_{GPH}$	0.2148	0.5336	0.5501	0.7776	0.8683	0.9757	0.9569
	$d_R$	0.0151	0.1387	0.1548	0.5861	0.6107	0.6302	0.6951
	$d_{ELW}$	0.7914	0.6975	0.7032	0.7982	0.8751	0.8058	0.7252
	$d_{W_{ave}}$	0.3038	0.4905	0.5203	0.7475	0.6902	0.9029	0.8865
0.5	$d_H$	1.2005	0.6977	0.5257	0.7741	0.4308	0.4775	0.3974
	$d_{Lo}$	3.9515	7.7786	7.6045	11.607	11.695	10.884	10.634
	$d_{GPH}$	0.3302	0.7726	0.7561	0.8391	0.9131	1.0152	1.0019
	$d_R$	0.0228	0.3716	0.3786	0.8520	0.8323	0.8855	0.9344
	$d_{ELW}$	0.8261	0.5799	0.8044	0.6220	0.5980	0.6182	0.6446
	$d_{W_{ave}}$	0.5978	0.8097	0.8162	1.0338	0.8569	1.0497	0.9434
1	$d_H$	1.3572	0.6907	0.5331	0.7300	0.4084	0.4530	0.3922
	$d_{Lo}$	5.1226	9.0477	8.6835	11.736	11.748	10.926	10.698
	$d_{GPH}$	0.4069	0.8476	0.8179	0.8532	0.9252	1.0216	1.0142
	$d_R$	0.0309	0.4779	0.4941	0.8995	0.8432	0.9564	0.9688
	$d_{ELW}$	0.8117	0.7593	0.9095	0.6858	0.7895	0.6208	0.7143
	$d_{W_{ave}}$	0.7121	0.9316	0.9249	1.1062	0.9030	1.1038	0.9580

**Table 6.** Modèles à rupture occasionnelle (Mean plus noise model): résultats d'estimation de  $d$ .

Enfin le Tableau 8 montre, au vu des résultats de  $\hat{d}$  par la méthode  $ELW$ , qu'on ne peut pas accepter la stationnarité du processus  $I(d)$ . Pour la méthode  $ELW$ , la valeur estimée de  $d$  est significativement supérieure à  $\frac{1}{2}$  quelque soit  $\sigma_\varepsilon$ . Au vu de ces résultats nous constatons que la forme de persistance observée est sujette aux changements au niveau du paramètre de la moyenne  $\mu$  du processus.

Nos résultats sur l'estimation du paramètre  $d$  montrent, de manière général, l'absence de longue mémoire sur les données issues des processus à changement de régime malgré que leurs ACF soient lentement décroissantes. Ces résultats obtenus sont en accord avec ceux de Mikosch et Stărică (2004) sur le comportement de l'ACF sous non-stationnarité. Ces résultats confirment aussi ceux obtenus par Guégan (2007). Le comportement de  $\hat{d}$ , en particulier lorsqu'il est proche de 1, semble être en accord avec les récents travaux de Charfedine et Guégan (2007). En conclusion, nos résultats montrent que la décroissance lente de



$\sigma_\epsilon^2$	$\gamma$	0.01	0.1	1	10	100	1000
0.05	$d_H$	0.5007	0.4378	0.2699	0.6873	0.0572	0.0060
	$d_{Lo}$	11.450	10.577	8.2127	4.5402	1.3353	1.2408
	$d_{GPH}$	0.9262	0.8287	0.6066	0.3765	0.0285	0.0056
	$d_R$	0.8696	0.7161	0.4098	0.1613	0.0068	0.0045
	$d_{ELW}$	0.7524	0.7477	0.7521	0.7596	0.7396	0.7313
	$d_{W_{ave}}$	1.0282	0.9332	0.4518	0.0067	0.0281	-0.2784
0.1	$d_H$	0.5012	0.4738	0.2767	0.6123	0.2433	0.0013
	$d_{Lo}$	11.459	11.056	8.8784	6.1712	1.6677	1.2379
	$d_{GPH}$	0.9281	0.8823	0.6598	0.4870	0.0860	0.0056
	$d_R$	0.8732	0.7984	0.4756	0.2688	0.0167	0.0046
	$d_{ELW}$	0.7468	0.7438	0.7494	0.7488	0.7661	0.7354
	$d_{W_{ave}}$	1.1017	0.9787	0.7596	0.2318	0.0263	-0.2799
0.5	$d_H$	0.4991	0.5007	0.4378	0.2699	0.6873	0.0574
	$d_{Lo}$	11.408	11.450	10.577	8.2127	4.5402	1.3352
	$d_{GPH}$	0.9233	0.9262	0.8287	0.6066	0.3765	0.0285
	$d_R$	0.8653	0.8696	0.7161	0.4098	0.1613	0.0068
	$d_{ELW}$	0.7491	0.7494	0.7512	0.7522	0.7647	0.7447
	$d_{W_{ave}}$	1.1574	1.1224	1.0191	0.4786	0.0031	-0.2817
1	$d_H$	0.4981	0.5012	0.4738	0.2767	0.6123	0.2433
	$d_{Lo}$	11.381	11.459	11.057	8.8784	6.1712	1.6677
	$d_{GPH}$	0.9198	0.9281	0.8823	0.6598	0.4870	0.0861
	$d_R$	0.8596	0.8732	0.7984	0.4756	0.2689	0.0166
	$d_{ELW}$	0.7530	0.7441	0.7443	0.7497	0.7462	0.7606
	$d_{W_{ave}}$	1.1703	1.1157	1.0804	0.7674	0.2187	-0.2636

**Table 7.** STOPBREAK model : résultats d'estimation de  $d$ .

l'ACF des processus à changement de régime n'est pas un comportement caractéristique de longue mémoire pour ces derniers. Par conséquent l'utilisation de l'ACF comme outil de détection de la longue mémoire, sur des données nonstationnaire, peut créer une confusion entre l'existence d'une longue mémoire réelle et d'un changement de régime.

## 6. Application sur des données réelles

Dans cette partie, nous examinons la série temporelle relative aux rendements journaliers de l'indice américain du S&P 500, pour la période allant du 01 Janvier 1928 à 26 juillet 2012, avec un total de 22323 observations journalières. Soit  $P_t$  le prix de l'action à la période  $t$ , incluant les dividendes, les rendements du S&P 500,  $R_t$  sont tels que

$$R_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1})$$

### 6.0.8. Etude de la série des rendements du S&P 500

Le Tableau 9 résume l'étude de la série des rendements journaliers de l'indice S&P 500.

Le coefficient d'aplatissement est très largement supérieur à 3; les queues de distribution des rendements sont donc plus épaisses que celles de la loi normale et la distribution est leptokurtique.

$d$	$T$	200	600	800	1000	2000
0.1	$d_H$	0.1079	0.0899	0.0898	0.1127	0.0879
	$d_{Lo}$	1.4130	1.5945	1.6516	1.7213	1.8182
	$d_{GPH}$	0.0892	0.1006	0.0993	0.1062	0.1031
	$d_R$	0.1063	0.0944	0.0965	0.1083	0.1043
	$d_{ELW}$	0.7491	0.7185	0.7034	0.6992	0.6796
	$d_{Wave}$	0.0909	0.0812	0.0894	0.0945	0.0670
0.2	$d_H$	0.1901	0.1746	0.1728	0.1754	0.1528
	$d_{Lo}$	1.6918	2.0994	2.2271	2.3323	2.6409
	$d_{GPH}$	0.1916	0.2021	0.1994	0.2050	0.2037
	$d_R$	0.2029	0.1946	0.1965	0.2039	0.2067
	$d_{ELW}$	0.7587	0.7429	0.7426	0.7388	0.7437
	$d_{Wave}$	0.1946	0.1787	0.1832	0.1215	0.1636
0.3	$d_H$	0.2693	0.2649	0.2527	0.2819	0.2688
	$d_{Lo}$	2.0289	2.7221	2.9499	3.2119	3.8664
	$d_{GPH}$	0.3186	0.3097	0.3019	0.3064	0.3059
	$d_R$	0.3043	0.3091	0.2969	0.3078	0.3062
	$d_{ELW}$	0.7634	0.7826	0.7773	0.7673	0.7397
	$d_{Wave}$	0.2881	0.2508	0.2790	0.2240	0.2585
0.4	$d_H$	0.3345	0.3312	0.3260	0.3543	0.3506
	$d_{Lo}$	2.3294	3.4221	3.7872	4.1934	5.3590
	$d_{GPH}$	0.3993	0.4109	0.4058	0.4106	0.4088
	$d_R$	0.4048	0.3991	0.4005	0.4082	0.4090
	$d_{ELW}$	0.7438	0.7999	0.8127	0.8125	0.7985
	$d_{Wave}$	0.3879	0.3348	0.3661	0.3230	0.3571
0.45	$d_H$	0.3648	0.3622	0.3603	0.3819	0.3849
	$d_{Lo}$	2.4982	3.7867	4.2366	4.6255	6.1718
	$d_{GPH}$	0.4559	0.4645	0.4586	0.4625	0.4617
	$d_R$	0.4592	0.4512	0.4510	0.4595	0.4606
	$d_{ELW}$	0.7252	0.7667	0.7877	0.8014	0.8192
	$d_{Wave}$	0.4363	0.3348	0.3661	0.3721	0.4092

**Table 8.** Modèle FARIMA : résultats d'estimation de  $d$ .

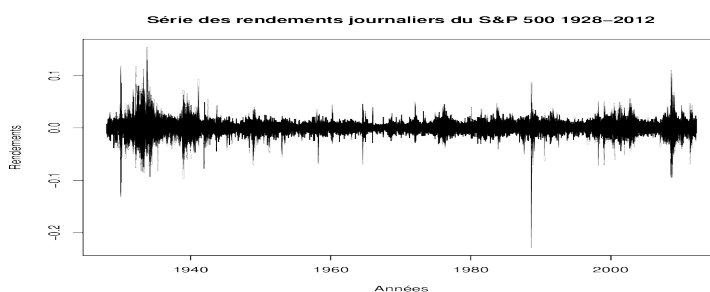
Les p-value des tests de Ljung-Box et de Box-Pierce sont très petites, donc les rendements sont fortement autocorrélés. Le test GPH de longue mémoire ne rejette pas l'hypothèse nulle d'absence de longue mémoire. Les rendements sont non persistants.

Les p-values des tests de Dickey-Fuller, de Dickey-Fuller augmenté et de Phillips Peron sont inférieurs au niveau de confiance fixé à 5%, on rejette l'hypothèse nulle d'une racine unitaire. Pour le test KPSS, on obtient un p-value=0.1 supérieur au seuil de 5%, on ne rejette pas l'hypothèse nulle de stationnarité. Les rendements des actions, d'après tous les tests, sont donc stationnaires mais fortement corrélés, de distribution asymétrique et leptokurtique.

Figure 9 et Figure 10 présentent respectivement la trajectoire des rendements de l'indice et la fonction d'autocorrélation des rendements absolus. La fonction d'autocorrélation montre une décroissance hyperbolique indiquant la présence de la longue mémoire. Nous allons vérifier cette hypothèse de longue mémoire à l'aide des différents estimateurs, précédents, du paramètre de longue mémoire.

<b>Statistiques descriptive</b>	
Nombre d'observations	22321
Moyenne	0.00019
Ecart-type	0.01161
Coefficient d'asymétrie	-0.42367
Coefficient d'aplatissement	18.803
Minimum	-0.2280
Maximum	0.15370
<b>Test d'autocorrélation</b>	
Statistique de Box-Pierce <sub>l=10</sub>	104.65
p-value	22.10 <sup>-17</sup>
Statistique de Ljung-Box <sub>l=10</sub>	104.68
p-value	22.10 <sup>-17</sup>
<b>Test de Longue mémoire</b>	
Statistique GPH	0.0276
<b>Tests de racine unitaire</b>	
Test de Dickey-Fuller <sub>l=0</sub>	-144.86
p-value	0.01
Test de Dickey-Fuller Augmenté <sub>l=1</sub>	-108.37
p-value	0.01
Test de Phillips-Perron <sub>l=1</sub>	-21303.47
p-value	0.01
Test KPSS	0.189
p-value	0.1

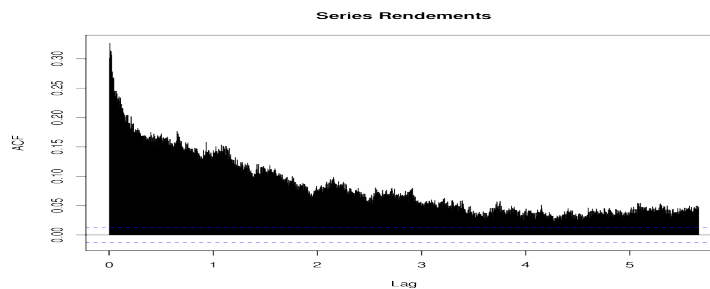
**Table 9.** Données quotidiennes du 01 janvier 1928 au 26 juillet 2012.



**Fig. 9.** Trajectoire de la série des rendements du S&P 500.

Dans le Tableau 10, les estimations du paramètre longue mémoire sont reportés. On observe que, les valeurs estimées du paramètre longue mémoire sont très proche de zéro quelle que soit la méthode d'estimation utilisée.

On teste la présence de changement structurel avec l'hypothèse nulle d'absence de changement structurel, en utilisant la statistique de Chow ainsi que la méthode d'identification par intervalle d'homogénéité de Stărica et Granger (2005). Pour ce dernier test, on considère le premier sous échantillon  $X_{n_1}, \dots, X_{n_2}$ , avec  $n_1 = 1$  et  $n_2 = 5000$ .



**Fig. 10.** Fonction d'autocorrélation de la série en valeur absolue des rendements du S&P 500.

Tableau 10				
$d_H$	$d_{GPH}$	$d_R$	$d_{ELW}$	$d_{W_{ave}}$
0.0673	0.05425	0.06056	0.00936	0.0487

**Table 10.** Estimation du paramètre longue mémoire.

Tableau 11			
Chow test		Test d'identification	
Statistique	p-value	Statistique	p-value
14.0436	0.023	2.573	0.0081

**Table 11.** Tests de changement structurel.

Le test de Chow, avec une p-value de 0.023, rejette l'hypothèse nulle de stabilité des paramètres des sous échantillons, au seuil de 5%. Les rendements sont caractérisés par des changements structurels. En posant  $p = 500$  nouveaux points de données,  $s = 800$  la taille du sous échantillon sur lequel le test est conduit, le test statistique d'identification des intervalles d'homogénéité pratiqué sur le sous échantillon  $X_{n_2+p-s}, \dots, X_{n_2+p}$  fournit une valeur  $T = 2.573$  largement supérieur à la valeur critique au risque  $\alpha = 5\%$ , ce qui fait que le bloc  $X_1, \dots, X_{500}$  ne peut pas être étendu à  $X_1, \dots, X_{550}$ , ceci est vraisemblablement dû à un changement structurel des données.

En conclusion, la série en valeur absolue des rendements quotidiennes de S&P 500 est caractérisée par une non stationnarité structurelle (ou stationnarité locale) et non par la longue mémoire. En effet, la décroissance lente des rendements absolus est bien consistant avec les résultats de l'étude du comportement de l'ACF sous stationnarité locale, par [Mikosch et Stărică \(2004\)](#).

## 7. Conclusion

Dans cet article, nous avons montré que les processus stationnaires avec changement structurels sont souvent confondus aux processus à mémoire longue. Par une étude de Monte Carlo, nous avons mis en évidence le comportement de longue mémoire de la fonction d'autocorrélation des processus à changement de régime. Nous avons vérifié cette hypothèse

de longue mémoire à l'aide des différents estimateurs du paramètre longue mémoire et avons trouvé, de manière générale, l'inexistence de longue mémoire. Ce qui nous amène à remarquer que l'utilisation de l'ACF peut créer une confusion dans la modélisation de certaines données en présence de non-stationnarité. Cet outil d'analyse est insuffisant pour caractériser le comportement de n'importe quelles données dans ce contexte. Enfin par une étude empirique avec les rendements du S&P 500, à travers des méthodes d'estimation du paramètre de longue mémoire et des tests de changement de régime, nous avons montré que la décroissance lente de la fonction d'autocorrélation de ces processus résulte d'une non stationnarité structurelle. Ce résultat remet en cause l'hypothèse de la stationnarité globale des processus à changement de régime.

## Références

- Beran, J. 1994. *Statistics for Long-Memory Processes*. Chapman & Hall.
- Bisaglia, L. and Gerolimetto, M., 2009. An Empirical Strategy to Detect Spurious Effects in Long Memory and Occasional-Break Processes. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*. **38**(1), 172-189.
- Bisaglia, L. and Gerolimetto, M., 2008. Testing structural breaks versus long memory with the Box-Pierce statistics: a Monte Carlo study, *Stat Methods Appl*. DOI 10.1007/s10260-008-0112-x.
- Box G.E.P, Pierce, D., 1970. Distribution of residual autocorrelations in autoregressive integrated moving average time series models. *Journal of the American Statistical Association*. **65**, 1509-26.
- Breidt, F. and Hsu, N., 2002. A Class of nearly long memory time series models. *International Journal of Forecasting*. **18**, 265-281.
- Charfeddine, L. et Guégan, D. 2012. Breaks or long memory behavior : an empirical approach. *Physica. A* **391**, 5712-5726.
- Chen, C. and Tiao, G.C., 1990. Random Level-Shift Time Series Models, ARIMA Approximations, and Level-Shift Detection. *Journal of Business & Economic Statistics*. **8**, 83-97.
- Diebold, F.X. and Inoue, A., 2001. Long memory and regime switching. *Journal of Econometrics*. **105**, 131-159.
- Davies, R.B. and Harte, D.S., 1987. Test for Hurst effet, *Biometrika*. **74**, 95-101.
- Ding, Z., Granger, C.W.J. and Engle, R., 1993. A long memory property of stock returns and a new model. *Journal of Empirical Finance*. **1**, 83-106.
- Engle R.F. and Smith, A.D., 1999. Stochastic permanent breaks. *The review of Economics and Statistics*. **81**, 553-574.
- Engle, C. and Hamilton J.D., 1990. Longs wing sin the dollar; are the yin the data and do markets know it?, *American Economic Review*. **80**, no. 4, 689-713.
- Franses, P.H. and Van, Dijk, D., 2000. *Nonlinear time series models in empirical finance*. Cambridge. New York and Melbourne : Cambridge University Press.
- Geweke, J. and Porter-Hudak, S., 1983. The Estimation And Application Of Long-Memory Time Series Models. *Journal of Time Series Analysis*. **4**, 221-238.
- Granger, C.W.J. and Hyung, N., 2004. Occasional structural breaks and long memory with an application to the S&P500 absolute stock returns. *Journal of Empirical Finance*. **11**, 339-421.

- Granger, C.W.J and Hyung, N., 2000. Occasional structural breaks and long memory, revised version of Discussion Paper, 99-14. University of California. San Diego.
- Granger, C.W.J. and Joyeux, R. 1980. An introduction to long-memory time series models and fractional differencing. *Journal of Time Series Analysis* **1**, 15-29.
- Guégan, D., 2007. Global and Local stationarity modelling in finance: Theory and empirical evidence, Working Paper 2007-02, CES Paris-Sorbonne et ENS Cachan, France.
- Guégan, D. and Rioublanc, S., 2005. Regime switching models: real or spurious long memory, Note de recherche MORA - IDHE - 02-2005, Février 2005, Cachan, France.
- Hamilton, J.D., 1989. A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. *Econometrica*, **57**(2), 357-384.
- Hosking, J.R.M., 1981. Fractional differencing, *Biometrika*. **68**, 165-176.
- Hosking, J.R.M., 1996. Asymptotic distributions of the sample mean, autocovariances and autocorrelations of long-memory time series. *Journal of Econometrics*. **73**, 261-284.
- Lamoureux, C.G. and Lastrapes, W.D., 1990. Persistence in Variance, Structural Change and the GARCH model, *Journal of Business and Economic Statistics* **8**, 225—234.
- Lee, J., 2005. Estimating memory parameter in the US inflation rate. *Economics Letters*. **87**, 207-210.
- Lim, K.S. and Tong, H. 1980. Threshold Autoregression. Limit Cycles and Data. *Journal of the Royal Statistical Society. Serie B.* vol. **42**, 245-292.
- Ljung, GM, Box, G.E.P., 1978. On a measure of lack of fit in time series models. *Biometrik*. **65**, 297-303.
- Lo, A.W., 1991. Long term memory in stock market prices, *Econometrica*. **59**, 1279-1313.
- Lobato, I.N. and Savin, N.E., 1998. Real and spurious long-memory properties of stock-market data. *Journal of Business and Economic Statistics* **16**, 261-283.
- Mikosch, T. and Stărică, C., 2004. Non-stationarities in Financial Time Series, the Long Range Dependence and the IGARCH Effects. *The Review of Economics and Statistics*. **86**, 378-390.
- Robinson, P.M., 1995. Gaussian semiparametric estimation of long range dependence. *Annals of Statistics*. **23**, 1630-1661.
- Robinson, P.M., 1990. Time series with strong dependence, *Advances in econometrics*, 6th world congress (Cambridge University Press, Cambridge).
- Shimotsu, K. and Phillips, P.C.B., 2005. Exact Local Whittle Estimation of Fractional Integration. *The Annals of Statistics*. Vol. **33**(4), 1890-1933.
- Stărica, C. and Granger, C.W.J., 2005. Nonstationarities in stock returns. *The review of Economics and Statistics*. **87**, 503-522.
- Timmermann, A., 2000. Moments of Markov switching models. *Journal of Econometrics*. **96**, 75-111
- Tong, H., 1990. *Nonlinear Times Series : A Dynamic System Approach*, Oxford University Press.
- Willinger, W., Taqqu, M.S. and Teverovsky, V., 1999. Stock market prices and long range dependence. *Finance and Stochastics*. **3**, 1-13.