

L'ANALYSE CONCORG SIMULTANÉE : LA MÉTHODE CONCORGS.

¹GABRIEL KISSITA, ²ROGER ARMAND MAKANY, AND ³DOMINIQUE MIZÈRE

ABSTRACT. The analysis CONCORG is a method that investigates the link between two multi-tables (partitioned sets of variables measured on the same individuals). It allows to detail the contributions of partial sub-tables forming the two tables. CONCORG is an extension of Concor, which itself is an extension of the inter-battery analysis. This new method performs successive determinations of the solution. In this article, we propose three criteria that enables to simultaneously identify solutions. It happens that the three criteria are equivalent to the solution. In this sense, our method, denoted as CONCORGS, is a generalization of CONCORG. Finally, we establish a fundamental property checked at the optimum these three criteria.

Résumé :

L'analyse CONCORG est une méthode recherchant le lien entre deux multi-tableaux (ensembles des variables partitionnées mesurées sur les mêmes individus). Elle permet de détailler les contributions partielles des sous-tableaux formant les deux tableaux. CONCORG est une extension de CONCOR qui elle-même est un prolongement de l'analyse inter-batterie. C'est une méthode successive dans la détermination de la solution. Dans cet article, nous proposons trois critères généralisant CONCORG. Ces critères permettent de déterminer également des solutions simultanées. Cette méthode est dénommée CONCORGS puisque ces trois critères utilisés sont équivalents à la solution. Enfin, nous établissons une propriété fondamentale vérifiée à l'optimum par ces trois critères.

1. INTRODUCTION

L'analyse CONCOR de Lafosse et Hanafi ([5]) est une généralisation de l'analyse Inter-batterie de Tucker ([6]), elle détermine le lien entre un tableau de référence non partitionné Y et un tableau partitionné

$$X = [X_1|X_2|\dots|X_M]$$

en faisant jouer un rôle privilégié au tableau de référence, les autres M tableaux X_i jouant le même rôle entre eux. Elle est fondée sur la

2000 *Mathematics Subject Classification.* 62H25.

Key words and phrases. Français : multi-tableaux, analyse concor, solution successive, solution simultanée. English : multi-tables, concor analysis, successive solution, simultaneous solution.

¹GABRIEL KISSITA, ²ROGER ARMAND MAKANY, AND ³DOMINIQUE MIZÈRE

maximisation de la fonction

$$(1) \quad f(u_1, \dots, u_M, v) = \sum_{i=1}^M cov^2(X_i u_i, Y v)$$

sous les contraintes de norme unité sur les vecteurs u_i ($i = 1, \dots, M$) et v . Une solution de ce problème est déterminée de façon successive : c'est-à-dire, après avoir déterminé la solution d'ordre un, la solution d'ordre deux est déterminée en réitérant le procédé donnant la première solution après avoir remplacé les tableaux d'origine par leurs résidus de régression sur la première solution. On réitère cette procédure pour déterminer les solutions d'ordre strictement supérieur à deux. A l'optimum, on montre que la fonction (1) est équivalente à la maximisation de la fonction

$$(2) \quad g(u, v) = cov^2(Xu, Yv)$$

sous les contraintes de norme unité sur les vecteurs u et v . Une généralisation de (1) et (2) est obtenue en partitionnant aussi le tableau de référence Y en sous-tableaux Y_j ($j = 1, \dots, N$). L'analyse ainsi trouvée est nommée analyse CONCORG. Cette méthode est basée sur la maximisation des fonctions (1), (2) et de la fonction

$$(3) \quad h(u, v_1, \dots, v_N) = \sum_{j=1}^N cov^2(Xu, Y_j v_j)$$

sous les contraintes de norme unité sur les vecteurs u et v_j ($j = 1, \dots, N$). Une solution successive de CONCORG est donnée dans Kissita et al. ([3]). A l'optimum, on peut écrire la relation fondamentale

$$(4) \quad \sum_{j=1}^M cov^2(X_i u_i, Y v) = cov^2(Xu, Yv) = \sum_{j=1}^N cov^2(Xu, Y_j v_j).$$

Ainsi, dans cet article pour étudier le lien entre deux multi-tableaux, on propose de maximiser trois critères dont on montre (cf. § 4) qu'à l'optimum, ils sont égaux. L'analyse ainsi définie est appelée analyse CONCORGS.

Les données analysées se présentent sous la forme de deux multi-tableaux : le premier multi-tableaux est une matrice $X = [X_1|X_2|\dots|X_M]$ avec n lignes et $m = \sum_{i=1}^M m_i$ colonnes centrées, partitionnées M en tableaux X_i de dimension $n \times m_i$ pour $i = 1, \dots, M$; le second est une matrice $Y = [Y_1|Y_2|\dots|Y_N]$ avec n lignes et $q = \sum_{j=1}^N q_j$ colonnes

L'ANALYSE CONCORG SIMULTANÉE : LA MÉTHODE CONCORGS.

centrées, partitionnées en N tableaux Y_j de dimension $n \times q_j$. Soit U_i (resp. V_j) une matrice de dimension $m_i \times r$ (resp. $q_i \times r$), et $U = [U'_1|U'_2|\dots|U'_M]$ (resp. $V = [V'_1|V'_2|\dots|V'_N]$) la matrice contenant les poids de X (resp. Y), $r \leq \min(m_i, q_j), i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N$.

On note par $K_{XY} = X'Y$, $K_{X_iY} = X'_iY$ et $K_{XY_j} = X'Y_j$ les matrices des inter-covariances entre les tableaux X et Y , X_i et Y , X et Y_j .

On définit par

$$tr(A \text{diag}(A)) = \sum_{k=1}^r a_{kk}^2 = \|\text{diag}(A)\|^2$$

où $A = [a_{kh}]$, $1 \leq k \leq r$ et $1 \leq h \leq r$ est une matrice carrée, A' désigne la transposée de la matrice, $\text{diag}(A)$ la matrice diagonale de A et I_r la matrice identité d'ordre r .

Les données qui font que la méthode présente un intérêt ont été traitées en grande partie par Vivien (2002) [7]. Mais dans cet article, nous allons reprendre les données entre vins jeunes et vins vieux de Cahors (Laffargue *et al.* ([4]) traitées par Kissita ([2]), et Kissita *et al.* ([3]).

Ainsi à la section 2, nous présentons les trois critères de CONCORGS. Enfin à la section 3, nous donnons des algorithmes itératifs permettant de résoudre ces problèmes et donnons une propriété fondamentale vérifiée à la solution par ces critères.

Critères de CONCORGS.

Pour étudier le lien entre deux multi-tableaux X et Y , on propose de maximiser trois critères.

Critère 1 : Maximiser

$$(5) \quad f_1(U, V) = tr(U'X'YV \text{diag}(U'X'YV)) = \|\text{diag}(U'K_{XY}V)\|^2$$

sous les contraintes $U'U = V'V = I_r$, où $U = [U'_1|U'_2|\dots|U'_M]'$, $V = [V'_1|V'_2|\dots|V'_N]'$, $X = [X_1|X_2|\dots|X_M]$ et $Y = [Y_1|Y_2|\dots|Y_N]$

¹GABRIEL KISSITA, ²ROGER ARMAND MAKANY, AND ³DOMINIQUE MIZÈRE

Critère 2 : Maximiser

$$\begin{aligned}
 f_2(U_1, \dots, U_M, V_1, \dots, V_N) &= \sum_{i=1}^M \text{tr}(U_i' X_i' Y V \text{diag}(U_i' X_i' Y V)) \\
 (6) \qquad \qquad \qquad &= \sum_{i=1}^M \|\text{diag}(U_i' K_{X_i Y} V)\|^2
 \end{aligned}$$

sous les contraintes $U_i' U_i = V' V = I_r$, pour $i = 1, \dots, M$.

Critère 3 : Maximiser

$$\begin{aligned}
 f_3(U_1, \dots, U_M, V_1, \dots, V_N) &= \sum_{j=1}^N \text{tr}(U' X_i' Y_j V_j \text{diag}(U' X_i' Y_j V_j)) \\
 (7) \qquad \qquad \qquad &= \sum_{j=1}^N \|\text{diag}(U' K_{X Y_j} V_j)\|^2
 \end{aligned}$$

sous les contraintes $U' U = V_j' V_j = I_r$, pour $j = 1, \dots, N$.

Ces trois critères sont égaux à l'optimum (et égaux au critère optimisé dans CONCORG quand $r = 1$) rappelons-le, voir le paragraphe 4.

2. MAXIMISATION DES FONCTIONS f_α ($\alpha = 1, 2, 3$)

Pour maximiser f_α ($\alpha = 1, 2, 3$) sous les contraintes $U' U = V' V = I_r$, $U_i' U_i = V' V = I_r$ et $U' U = V_j' V_j = I_r$ respectivement pour $i = 1, \dots, M$ et $j = 1, \dots, N$ deux algorithmes itératifs associés à 1 et 2 sont donnés, celui de 3 est similaire à 2 en intervertissant les rôles de i et j . Ces algorithmes procèdent par la mise à jour itérative de U et V . La monotonie revient à montrer la croissance des fonctions f_α d'abord par rapport à U et après par rapport à V .

2.1. Maximisation de f_1 . Pour construire les mises à jour U^* et V^* des matrices U et V , on choisit aléatoirement des matrices vérifiant les contraintes $U' U = V' V = I_r$. Cette construction va se faire alternativement et en trois étapes. La première étape est consacrée à la maximisation de f_1 par rapport à U , la seconde étape consiste à maximiser f_1 par rapport à V et la troisième étape est réservée à la monotonie de l'algorithme.

Première étape : détermination de la mise à jour U^* .

Pour déterminer la mise à jour U^* dans le problème : maximiser $f_1(U, V) = tr(U'X'YVdiag(U'X'YV))$, sous les contraintes $U'U = V'V = I_r$. On procède ainsi : en notant $K_{XY} = X'Y$ rappelons le, on écrit la fonction $f_1(U, V) = trU'T_{UV}$ avec $T_{UV} = K_{XY}Vdiag(U'K_{XY}V)$. On prend la décomposition en valeurs singulières de $T_{UV} = PDQ'$ où $P'P = Q'Q = QQ' = I_r$. La mise à jour de U est donnée par la matrice $U^* = PQ'$. Pour la preuve de ce résultat voir Cliff ([1]).

Deuxième étape : détermination de la mise à jour V^* .

Pour trouver la mise à jour de V notée V^* , on écrit f_1 sous la forme

$$f_1(U, V) = tr(V'K_{YX}Udiag(U'K_{XY}V)) = trV'H_{UV}$$

où $H_{UV} = K_{XY}Udiag(U'K_{XY}V)$ et $U = U^*$ déterminée à la première étape. En procédant comme à l'étape 1, on trouve $V^* = LG'$ la mise à jour de V avec $H_{UV} = L\Delta G'$ la décomposition en valeurs singulières de H_{UV} où $L'L = G'G = GG' = I_r$.

Troisième étape : monotonie de l'algorithme.

Nous ne montrons la monotonie de l'algorithme que par rapport à U , sachant que celle de V se démontre de la même manière en échangeant seulement les rôles de U et V . Il est donc question de montrer que

$$f_1(U, V) \leq f_1(U^*, V) \leq f_1(U^*, V^*).$$

Pour établir cette monotonie par rapport à U , il suffit de montrer que $f_1(U, V) \leq f_1(U^*, V)$. En effet, à l'aide de la matrice $U^{*'}T_{UV} = U^{*'}K_{XY}Vdiag(U'K_{XY}V)$, on peut en tirer le $k^{ième}$ élément diagonal

$$u_k^{*'}K_{XY}v_k u_k'K_{XY}v_k = u_k^{*'}G_{XYk}u_k$$

où $u_k = [u'_{1k}|...|u'_{ik}|...|u'_{Mk}]'$ et $u_k = [v'_{1k}|...|v'_{ik}|...|v'_{Nk}]'$ sont respectivement les $k^{ièmes}$ vecteurs blocs colonnes des matrices U et V , et $G_{XYk} = K_{XY}v_k v_k'K_{YX}$ une matrice symétrique semi-définie positive. Par conséquent :

$$(8) \quad \left\| G_{XYk}^{1/2}u_k - G_{XYk}^{1/2}u_k^* \right\|^2 \geq 0.$$

La relation (8) est équivalente à la relation ci-dessous

$$(10) \quad u_k'G_{XYk}u_k + u_k^{*'}G_{XYk}u_k^* \geq 2u_k^{*'}K_{XY}v_k u_k'K_{XY}v_k$$

¹GABRIEL KISSITA, ²ROGER ARMAND MAKANY, AND ³DOMINIQUE MIZÈRE

ou encore

$$(10) \quad u'_k K_{XY} v_k u'_k K_{XY} v_k + u_k^* K_{XY} v_k u_k^* K_{XY} v_k \geq 2u_k^* K_{XY} v_k u'_k K_{XY} v_k.$$

En sommant (10) par rapport à k , on trouve la relation équivalente suivante

$$(11) \quad tr(U' K_{XY} V diag(U' K_{XY} V) + tr(U^* K_{XY} V diag(U^* K_{XY} V)) \geq 2tr(U^* K_{XY} V diag(U' K_{XY} V)).$$

En se référant à Cliff ([1]), on a, à partir de la mise à jour U^* la relation

$$(12) \quad tr(U^* K_{XY} V diag(U' K_{XY} V)) \geq tr(U' K_{XY} V diag(U' K_{XY} V)).$$

En combinant (11) et (12), on trouve la relation recherchée ci-dessous

$$tr(U^* K_{XY} V diag(U^* K_{XY} V)) \geq tr(U' K_{XY} V diag(U' K_{XY} V)).$$

Ce qui permet d'écrire $f_1(U^*, V) \geq f_1(U, V)$. D'où la monotonie de l'algorithme par rapport à U . Le résumé de l'algorithme itératif de détermination de la solution concernant la maximisation de f_1 sous les contraintes $U'U = V'V = I_r$ est placé en annexe 1.

On peut donc dire que les mises à jour de U et de V font croître monotonement la fonction f_1 . La fonction étant bornée, continue et croissante monotone en particulier sur l'ensemble formé par les vecteurs normés constitués par les colonnes des matrices U et V , l'algorithme converge. Le choix particulier de $U = U^*$ implique que $U^{*'} T_{UV} = QP'PDQ' = QDQ'$ est une matrice symétrique semi-définie positive, et donc D contient des valeurs singulières positives ou nulles.

2.2. Maximisation de f_2 . Pour construire les mises à jour U_i^* ($i = 1, \dots, M$) et V^* trois étapes sont aussi considérées. La première est donc relative à la maximisation de f_2 par rapport à U_i ($i = 1, \dots, M$), la seconde étape est réservée à V et la troisième concerne la monotonie de f_2 .

Première étape : détermination de la mise à jour U_i^* .

Le problème à résoudre est la maximisation de f_2 sous les contraintes $U_i' U_i = V' V = I_r$ ($i = 1, \dots, M$), ce qui est équivalent à la maximisation de

$$tr(U_i' K_{XY} V diag(U_i' K_{XY} V))$$

L'ANALYSE CONCORG SIMULTANÉE : LA MÉTHODE CONCORGS.

sous les mêmes contraintes et où $K_{X_iY} = X_i'Y$. Ainsi à la première étape, on détermine la mise à jour U_i^* ($i = 1, \dots, M$). Pour cela, on écrit

$$tr(U_i'K_{XY}Vdiag(U_i'K_{XY}V)) = trU_i'T_{U_iV}$$

où

$$T_{U_iV} = K_{X_iY}Vdiag(U_i'K_{X_iY}V)$$

est une matrice de dimension $m_i \times r$ ($i = 1, \dots, M$). En faisant la décomposition en valeurs singulières de

$$T_{U_iV} = P_iD_iQ_i'$$

avec $P_i'P_i = Q_i'Q_i = I_r$. La mise à jour de U_i est $U_i^* = P_iQ_i'$ ($i = 1, \dots, M$) (voir Cliff [1]).

Deuxième étape : détermination de la mise à jour V^* .

A l'étape 2, on détermine la mise à jour de V . Pour construire cette mise à jour de V , on remarque que

$$f_2 = trV' \sum_{i=1}^M K_{YX_i}U_idiag(U_i'K_{X_iY}V) = trV'H_{UV}$$

où

$$H_{UV} = \sum_{i=1}^M K_{YX_i}U_idiag(U_i'K_{X_iY}V)$$

est une matrice de dimension $q \times r$ et où $U_i = U_i^*$ trouvée à l'étape 1. La décomposition en valeurs singulières de $H_{UV} = L\Delta G'$ avec $L'L = G'G = G'G = I_r$ conduit à la mise à jour $V^* = LG'$.

Troisième étape : monotonie de l'algorithme.

Après avoir trouvé les mises à jour par rapport à U_i ($i = 1, \dots, M$) et à V , on peut maintenant établir de la même manière que précédemment la monotonie de l'algorithme relativement à U_i ($i = 1, \dots, M$). En effet, considérons le $k^{ième}$ élément diagonal de la matrice

$$U_i^{*'}T_{U_iV} = U_i^{*'}K_{X_iY}Vdiag(U_i'K_{X_iY}V)$$

défini par le scalaire

$$u_{ik}^{*'}K_{X_iY}v_k u_{ik}'K_{X_iY}v_k = u_{ik}^{*'}G_{X_iYk}u_{ik},$$

où u_{ik} et v_k sont respectivement les $k^{ième}$ s colonnes des matrices U_i et V , avec

$$G_{X_iYk} = K_{X_iY}v_k v_k'K_{X_iY}$$

¹GABRIEL KISSITA, ²ROGER ARMAND MAKANY, AND ³DOMINIQUE MIZÈRE

une matrice symétrique semi-définie positive. Il en résulte pour $i = 1, \dots, M$, l'inégalité ci-dessous

$$(14) \quad \left\| G_{X_i Y k}^{1/2} u_{ik} - G_{X_i Y k}^{1/2} u_{ik}^* \right\|^2 \geq 0.$$

(14) est équivalente à

$$(15) \quad u_{ik}' G_{X_i Y k} u_{ik} + u_{ik}^{*'} G_{X_i Y k} u_{ik}^* \geq 2u_{ik}^{*'} G_{X_i Y k} u_{ik}$$

ou encore

$$(16) \quad u_{ik}' K_{X_i Y} v_k u_{ik}' K_{X_i Y} v_k + u_{ik}^{*'} K_{X_i Y} v_k u_{ik}^{*'} K_{X_i Y} v_k \geq 2u_{ik}^{*'} K_{X_i Y} v_k u_{ik}' K_{X_i Y} v_k.$$

En sommant (16) sur k , il en découle pour $i = 1, \dots, M$, la relation suivante :

$$(17) \quad \begin{aligned} & tr(U_i' K_{X_i Y} V diag(U_i' K_{X_i Y} V)) + tr(U_i^{*'} K_{X_i Y} V diag(U_i^{*'} K_{X_i Y} V)) \\ & \geq 2tr(U_i^{*'} K_{X_i Y} V diag(U_i' K_{X_i Y} V)), \end{aligned}$$

U_i^* étant la mise à jour de U_i , selon Cliff ([1]), on a la relation suivante

$$(18) \quad tr(U_i^{*'} K_{X_i Y} V diag(U_i' K_{X_i Y} V)) \geq tr(U_i^{*'} K_{X_i Y} V diag(U_i K_{X_i Y} V))$$

En mettant (17) dans (18), on trouve la relation recherchée

$$tr(U_i^{*'} K_{X_i Y} V diag(U_i^{*'} K_{X_i Y} V)) \geq tr(U_i^{*'} K_{X_i Y} V diag(U_i K_{X_i Y} V))$$

Enfin en sommant (19) sur i , on trouve $f_2(U^*, V) \geq f_2(U, V)$ où $U = [U_1' | U_2' | \dots | U_M']'$. On peut donner un résumé de l'algorithme itératif permettant de déterminer la solution au problème de maximisation de f_2 sous les contraintes $U_i' U_i = V' V = I_r$ ($i = 1, \dots, M$) en annexe 2.

2.3. Algorithme pour la maximisation de f_3 . Pour maximiser

$$f_3 = \sum_{j=1}^N tr(U' K_{X Y_j} V_j diag(U' K_{X Y_j} V_j))$$

avec les contraintes $U' U = V_j' V_j = I_r$ ($j = 1, \dots, N$), nous procédons comme pour la maximisation de f_2 sous les contraintes $U_i' U_i = V' V = I_r$ ($i = 1, \dots, M$) en intervertissant les rôles de U_i et V_i , et ensuite de U et V . Par conséquent, on trouve le résumé de l'algorithme itératif permettant de maximiser f_3 sous les contraintes ci-dessus en annexe 3.

3. RELATION FONDAMENTALE VÉRIFIÉE PAR CONCORGS

La relation que nous allons donner dans la propriété suivante est une des caractéristique des méthodes CONCORG dans leur ensemble. Ici, cette relation est une extension de (4) dans CONCORG ($r = 1$). A l'optimum, on a la relation

$$(20) \quad \sum_{i=1}^M tr(U'_i K_{X_i Y} V diag(U'_i K_{X_i Y} V)) =$$

$$tr(U' K_{XY} V diag(U' K_{XY} V)) = \sum_j^N tr(U' K_{XY_j} V_j diag(U' K_{XY_j} V_j))$$

La preuve de cette propriété est immédiate, car elle est basée sur la relation (4) donnée en dimension un. En effet, on sait que :

$$(21) \quad \sum_{i=1}^M u'_{ik} K_{X_i Y} v_k u'_{ik} K_{X_i Y} v_k = u'_k K_{XY} v_k u'_k K_{XY} v_k$$

$$= \sum_{j=1}^N u'_k K_{XY_j} v_{jk} u'_k K_{XY_j} v_{jk},$$

où u_{ik} , u_k , v_{jk} et v_k sont respectivement les $k^{ièmes}$ colonnes des matrices U_i , U , V_j et de V . En sommant par rapport à k , la relation (21), on trouve la relation (20).

4. APPLICATION

Pour établir la pertinence de la démarche CONCORGS par rapport à l'approche successive, nous reprenons les données entre vins jeunes et vins vieux de Cahors (Laffargue *et al.* ([4]) rappelons-le qui ont aussi été traitées par Kissita ([2]), Kissita *et al.* ([3]), Lafosse et Ten Berge ([5]). Ces données sont issues d'une expérimentation conduite par le syndicat de vins de Cahors. Différents tableaux sont constitués, chacun d'eux étant relatif à une année donnée (1983, 1985, 1988, 1989, 1993). Les 30 lignes de chaque tableau désignent 5×6 vins différents, un vin étant défini par un greffon donné associé à un porte-greffe donné. Les 5 porte-greffes différents et les 6 greffons possibles définissent alors 30 vins, rangés dans un même ordre quelque soit le tableau. Chaque année, 8 variables sont mesurées au moment de la récolte, puis 5 ans après quand le vin a vieilli. Elles définissent les 8 colonnes de chacun des 10 tableaux considérés (5 tableaux vins jeunes et 5 tableaux vins

¹GABRIEL KISSITA, ²ROGER ARMAND MAKANY, AND ³DOMINIQUE MIZÈRE

vieux). Il s'agit des mesures physico-chimiques suivantes : anthocyane (an), indice de réfraction du rouge (ro), indice de réfraction du jaune (ja), indice de folin (fo), degré en alcool (da), extrait sec (es), acidité totale (at), acidité volatile (av).

Le tableau ci-dessous donne les valeurs des critères CONCORG (méthode successive), CONCORGS (méthode simultanée) pour les 8 solutions.

Solution	1	2	3	4	5	6	7	8
CONCORG	64.45	24.07	9.16	1.55	0.67	0.21	0.00	0.00
CONCORGS	69.7	25.5	2.29	1.17	1.12	0.89	0.2	0.00

Les valeurs des critères pour les méthodes successive (CONCORG) et simultanée (CONCORGS) sont respectivement 100.11 et 100.87.

En plus les deux premières solutions sont respectivement pour la méthode successive et simultanée 88.52% et 95.2%. On constate que les valeurs de la méthode simultanée sont nettement supérieures par rapport aux valeurs de la méthode successive. C'est le premier algorithme qui a conduit au meilleur maximum.

Toutes ces méthodes ont un même objectif, on peut donc affirmer que pour ce genre des données, l'utilisateur peut choisir n'importe quelle méthode.

5. CONCLUSION

Nous venons là de définir une méthode simultanée de détermination de la solution de CONCORG. Ensuite, nous avons proposé des algorithmes convergents vers des solutions locales. Mais, pour obtenir des solutions globales, on tourne les algorithmes en adoptant plusieurs initialisations, et on choisit les plus grandes valeurs des fonctions, ce sont ces valeurs qui correspondent à la solution. Enfin, nous avons établi la relation fondamentale vérifiée à l'optimum par la solution.

6. ANNEXES

6.1. Annexe 1 : algorithme maximisant de f_1 .

- 1) Choisir U, V (exemple aléatoirement, telles que $U'U = V'V = I_r$), et ε (exemple, 0.00001).
- 2) Détermination des mises à jour.
 - A) Mise à jour de U .
 - 1) Calculer $T_{UV} = K_{XY}V \text{diag}(U'K_{XY}V)$.
 - 2) Faire la décomposition en valeurs singulières de $T_{UV} = PDQ'$.
 - 3) Poser pour mise à jour de U , la matrice $U^* = PQ'$.
 - B) Mise à jour de V .
 - 1) Calculer $H_{UV} = K_{YX}U \text{diag}(U'K_{XY}V)$, où $U = U^*$ trouvée précédemment.
 - 2) Effectuer la décomposition en valeurs singulières de $H_{UV} = L\Delta G'$.
 - 3) Poser pour mise à jour de V , la matrice $V^* = LG'$.
- 3) Si $f_1(U^*, V^*) - f_1(U, V) \leq \varepsilon$, alors l'algorithme a convergé, sinon $U^* = U$ et $V^* = V$ et aller à 2.

6.2. Annexe 2 : algorithme maximisant f_2 .

- 1) Choisir U, V (exemple aléatoirement, telles que $U_i'U_i = V'V = I_r$), et ε (exemple, 0.00001).
- 2) Recherche des mises à jour.
 - A) Mise à jour de U_i ($i = 1, \dots, M$).
 - 1) Calculer $T_{U_iV} = K_{X_iY}V \text{diag}(U_i'K_{X_iY}V)$ pour ($i = 1, \dots, M$).
 - 2) Faire la décomposition en valeurs singulières de $T_{U_iV} = P_iD_iQ_i'$ pour ($i = 1, \dots, M$).
 - 3) Poser pour mise à jour de U_i , la matrice $U_i^* = P_iQ_i'$ pour ($i = 1, \dots, M$).
 - 4) Poser $U^* = [U_1^* | U_2^* | \dots | U_M^*]'$.
 - B) Mise à jour de V .
 - 1) Calculer $H_{UV} = \sum_{i=1}^M K_{YX_i}U_i \text{diag}(U_i'K_{X_iY}V)$, où $U_i = U_i^*$ déterminée au point (2).
 - 2) Effectuer la décomposition en valeurs singulières de $H_{UV} = L\Delta G'$.
 - 3) Poser pour mise à jour de V , la matrice $V^* = LG'$.
- 3) Si $f_2(U^*, V^*) - f_2(U, V) \leq \varepsilon$, alors l'algorithme a convergé, sinon $U^* = U$ et $V^* = V$ et aller à 2.

¹GABRIEL KISSITA, ²ROGER ARMAND MAKANY, AND ³DOMINIQUE MIZÈRE

6.3. Annexe 3 : algorithme maximisant f_3 .

- 1) Choisir U, V (exemple aléatoirement, telles que $U'U = V_j'V_j = I_r$), et ε (exemple, 0.00001).
- 2) Recherche des mises à jour.
 - A) Mise à jour de U .
 - 1) Calculer $T_{UV} = \sum_{j=1}^N K_{XY_j} V_j \text{diag}(U' K_{XY_j} V_j)$.
 - 2) Faire la décomposition en valeurs singulières de $T_U = PDQ$.
 - 3) Poser pour mise à jour de U_i , la matrice $U_i^* = P_i Q_i'$ pour $(i = 1, \dots, M)$.
* Poser $U^* = PQ'$.
 - B) Mise à jour V_j pour $j = 1, \dots, N$.
 - 1) Calculer pour $j = 1, \dots, N$, $H_{UV_j} = K_{Y_j X} U \text{diag}(U' K_{XY} V_j)$, où $U = U^*$.
 - 2) Effectuer la décomposition en valeurs singulières de $H_{UV_j} = L_j \Delta_j G_j'$ pour $j = 1, \dots, N$.
 - 3) Poser pour mise à jour de V_j ($j = 1, \dots, N$) la matrice $V_j^* = L_j G_j'$.
 - 4) Poser $V^* = [V_1^* | V_2^* | \dots | V_N^*]'$.
- 3) Si $f_3(U^*, V^*) - f_3(U, V) \leq \varepsilon$, alors l'algorithme a convergé, sinon $U^* = U$ et $V^* = V$ et aller à 2.

REFERENCES

- [1] Cliff, N.(1966). Orthogonal rotation to congruence. *Psychometrika* **31**, 33-42.
- [2] Kissita, G., 2003. *Les analyses canoniques généralisées avec tableau de référence généralisé : éléments théoriques et appliqués*. Thèse, Université Paris- Dauphine.
- [3] Kissita, G., Cazes, P., Hanafi, M., Lafosse, R., 2004. Deux méthodes d'analyse factorielle du lien entre deux tableaux de variables partitionnées. *Rev. Statist. Appl.* **52** (3), 73-92.
- [4] Laffargue et coll. (1983-93). Expérimentation porte-greffes, greffons du cépage Cot. Maison des vins de Cahors. Ch. Agr. du Lot. CETA de Luzech. Lafosse, R., Hanafi, M., 1997. Concordance d'un tableau avec K tableaux : définition des K+1 uplés synthétiques. *Rev. Statist. Appl.* **45** (4), 111-126.
- [5] Lafosse, R., Ten Berge, J.M.S., 2006. A simultaneous CONCOR algorithm for the analysis of two partitioned matrices. *Computational Statistics and Data Analysis* **50**, 2529-2535.
- [6] Tucker, L.R., 1958. An interbattery method for factor invariance. *Psychometrika* **23**, 111-136.6.
- [7] Vivien, M., 2002. *Approches PLS linéaires et non linéaires pour la modélisation de multi-tableaux : théorie et applications*. Thèse, Université Montpellier I.

¹ISG, UNIVERSITÉ MARIEN NGOUABI BRAZZAVILLE-CONGO, GAKISSITA@YAHOO.FR

²FSE, UNIVERSITÉ MARIEN NGOUABI BRAZZAVILLE-CONGO, RMAKANY@YAHOO.FR

³FS, UNIVERSITÉ MARIEN NGOUABI, BRAZZAVILLE-CONGO, DMIZÈRE@YAHOO.FR