ISSN 0825-0305

Etude de l'estimateur de la distance minimale pour des modèles de rupture des processus de Poisson : cas avec simulations

D. B. BA*, A. S. DABYE†, A. DIAKHABY*, G. S. LO*

Résumé. *Ce travail est consacré aux problèmes d'estimation pour différents modèles de processus de Poisson non homogènes. Nous supposons que la fonction d'intensité du processus de Poisson est discontinue par rapport aux paramètres inconnus. On montre que l'estimateur de la distance minimale est consistant et asymptotiquement normal. Des simulations sont faites pour chaque modèle.*

Mot-clés : Processus de Poisson, estimation paramétrique, modèle non régulière, estimateur de la distance minimale, propriétés asymptotiques, simulations.

Abstract. *We consider several problems of parameter estimation by observations of different models of inhomogeneous Poisson processes of discontinuous intensity functions. It is shown that the minimum distance estimators of these parameters are consistent and asymptotically normal. The numerical simulation results are presented as well.*

Key words: Poisson processes, parameter estimation, non regular model, minimum distance estimator, asymptotics properties, simulations.

AMS subject classification: 62F10, 62F12, 62M05

*Université Gaston Berger de Saint-Louis
UFR Sciences Appliquées et de Technologie,
BP : 234 Saint-Louis, Sénégal

†Université Adam Barka d'Abéché,
Faculté des Sciences Exactes et Appliquées,
BP 1173 Abéché, Tchad
e-mail : dabye_ali@yahoo.fr

Received : 7 August 08. Revised version : 1 November 09

1 Introduction

Les problèmes d'estimation paramétrique d'intensité pour des processus de Poisson ont été étudiés très largement par Kutoyants [16] et [18]. Les processus de Poisson sont bien adaptés pour modéliser des phénomènes aléatoires de répartitions des points et permettent de décrire leurs propriétés à l'aide de la théorie des probabilités pour deux raisons principales.
D'abord ce sont les seuls processus ponctuels qui peuvent être représentés par leur mesure d'intensité. Cette propriété en fait les uns des processus les plus simples à utiliser dans la pratique.
Ensuite le choix de l'intensité permet de modéliser de nombreux comportements physiques correspondant à des situations réelles.

Aussi le choix d'un modèle est extrêmement important car il porte en lui les lois qui gèrent les points.

Pour la théorie générale de l'estimation asymptotique des processus de Poisson non homogènes on peut se référer à Daley et Vere-Jones [11], Cox et Lewis [7] et Kutoyants [16] et [18] et leurs références. On rappelle que pour des problèmes réguliers l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) $\hat{\vartheta}_n$, l'estimateur Bayésien (EB) $\widetilde{\vartheta}_n$ et l'estimateur de la distance minimale (EDM) $\vartheta_n^\star$ sont consistants, asymptotiquement normaux et asymptotiquement efficaces. Dans le cas où la fonction d'intensité est discontinue, les propriétés du EMV et EB sont différentes. En effet, seul l'estimateur Bayésien est asymptotiquement efficace, voir [14] et [16]. Pour les propriétés asymptotiques de l'EDM, voir [1], [20] et [22].

Dans les cas réguliers des problèmes d'estimation paramétrique pour un processus de Poisson (avec une fonction d'intensité dérivable) les propriétés des estimateurs du maximum de vraisemblance sont bien connues (voir Lewis [19], Daley et Vere-Jones [11], Karr [15] et Kutoyants [18]). Il a été démontré que ces estimateurs sont consistants et asymptotiquement normaux. Par contre, si la fonction d'intensité possède des sauts, alors la situation change. Il n'y a plus de normalité asymptotique (comme dans les modèles i.i.d avec densité discontinue, voir par exemple Huber [13] ou Ibragimov et Khasminskii [14]) et la vitesse de convergence est meilleure que dans les cas réguliers (voir Kutoyants [18, Chapitre 5]). Les propriétés des estimateurs des paramètres de fonction d'intensité discontinue furent étudiées par de nombreux auteurs. Pour le modèle de fonction d'intensité $S(\theta,t) = \theta_1\, g(\theta_2 t) + \lambda$, $0 \le t \le T$, avec $g(\cdot)$ discontinue, les propriétés de l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n$ et de Bayes $\widetilde{\theta}_n$ sont décrites dans Dabye [9]. En particulier, il a été démontré que le vecteur $(\sqrt{n}(\hat{\theta}_{1,n} - \theta_1), n(\hat{\theta}_{2,n} - \theta_2))$ converge faiblement vers le vecteur (ξ, ζ) où ξ est une variable gaussienne indépendante de ζ et ζ a une distribution non-gaussienne. Farinetto [12] a étudié le cas où l'intensité du processus

ISSN 0825-0305

est discontinue le long des courbes paramétrées et mène ainsi une étude statistique de structures spatiales en télécommunications. Pour une large utilisation des techniques dans ce domaine, on peut se référer au célèbre ouvrage de Kutoyants [18].

Dans ce travail, la seule méthode d'estimation utilisée est la méthode de la distance minimale. Nous décrivons pour différents modèles, les propriétés asymptotiques de cet estimateur. Pour le cas des processus de Poisson avec une fonction d'intensité continue, voir Aubry [1]. Parr [23] produit une bibliographie intéressante sur l'EDM.

2 Modèles

Nous étudions les propriétés de l'estimateur de la distance minimale pour des modèles issus des problèmes de l'estimation paramétrique des processus de Poisson. Les différents résultats présentés ont été établis grâce aux méthodes de Kutoyants [18]. Les estimateurs ont été calculés sur des réalisations de processus de Poisson obtenues par simulation. Pour chaque modèle une pose du problème, des définitions formelles et des hypothèses nécessaires sont avancées. Ensuite sont donnés les résultats des simulations.

2.1 Pose du problème

On observe un échantillon de n trajectoires $X^n = (X_1, \ldots, X_n)$, $X_i = \{X_i(t), 0 \leq t \leq T\}$ du processus de Poisson non homogène de l'intensité $S(\vartheta_0, t)$ et on considère le problème d'estimation paramétrique dans le cas

$$S(\vartheta_0, t) = \gamma_0\, g(\omega_0\, t + \psi_0) + \lambda, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \vartheta_0 = \big(\gamma_0, \omega_0, \psi_0\big) \in \Theta \qquad (1)$$

avec

$$\Theta = (\alpha_1,\beta_1) \times (\alpha_2,\beta_2) \times (\alpha_3,\beta_3),\ \alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > \ 0,\ \alpha_3 > \ 0$$

et les constantes β_1, β_2 et β_3 sont finies. La fonction $g(\cdot)$ et la constante λ sont positives et connues. Rappelons que

$$\mathbb{E}_{\vartheta_0} X_i(t) = \Lambda(\vartheta_0, t) = \int_0^t S(\vartheta_0, s)\, \mathrm{d}s.$$

Introduisons les conditions suivantes

$\mathbf{C_1}$) *La fonction $g(y)$, $y \in (\alpha_3, \beta_2 T + \beta_3)$ est continûment différentiable sur $[\alpha_3, \tau^*) \cup (\tau^*, \beta_2 T + \beta_3]$ et admet un saut au point $\tau^* \in (\beta_3, \alpha_2 T + \alpha_3)$*

avec $g(\tau_+^*)-g(\tau_-^*)=r>0$ et $g(\tau_+^*)\ g(\tau_-^*)\neq 0$. Le modèle est identifiable : pour tout $\delta>0$

$$\inf_{|\vartheta-\vartheta_0|\geq\delta}\int_0^T\left[\Lambda\left(\vartheta,t\right)-\Lambda\left(\vartheta_0,t\right)\right]^2 \mathrm{d}t>0.$$

$\mathbf{C_2}$) *La fonction $g\left(y\right),\ y\in(\alpha_3,\beta_2 T+\beta_3)$ est continûment différentiable sur $[\alpha_3,\tau_1^*)\cup(\tau_1^*,\tau_2^*)\cup(\tau_2^*,\beta_2\,T+\beta_3]$ et admet deux sauts aux points $\tau_1^*,\tau_2^*\in(\beta_3,\alpha_2 T+\alpha_3)$ avec $\tau_1^*<\tau_2^*$ et $g(\tau_i^*+)-g(\tau_i^*-)=r_i\neq 0$, i=1,2.*

Modèle $\mathbf{M_1}$ Lorsque $\theta=\big(\gamma,\omega,0\big)$, nous avons le modèle bien connu $S(\theta,t)=\gamma\,g(\omega\,t)+\lambda,\qquad 0\leq t\leq T$, étudié dans Aubry et Dabye [2].

Modèle $\mathbf{M_2}$ Lorsque $\theta=\big(1,\,\omega,\psi\big)$, nous avons l'autre modèle bien connu $S(\theta,t)=g(\omega\ t+\psi)+\lambda,\quad 0\leq t\leq T$ étudié dans BA, DABYE et DIOP [6] avec cas particulier $\lambda=0$.

L'estimateur étudié dans ce travail est l'estimateur de la distance minimale $\vartheta_n^\star$ définie par l'équation

$$\int_0^T\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i(t)-\Lambda(\vartheta_n^\star,t)\right)^2 \mathrm{d}t=\inf_{\vartheta\in\Theta}\int_0^T\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i(t)-\Lambda(\vartheta,t)\right)^2 \mathrm{d}t.$$

Si nous désignons par $L^2([0,T],dt)$ l'espace de Hilbert muni de la norme

$$\|f(\cdot)\|=\left(\int_0^T f^2(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

alors, nous pouvons définir l'*estimateur de la distance minimale* (EDM) $\vartheta_n^\star$ comme une solution de l'équation

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i(\cdot)-\Lambda(\vartheta_n^\star,\cdot)\right\|=\inf_{\vartheta\in\Theta}\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i(\cdot)-\Lambda(\vartheta,\cdot)\right\|. \tag{3}$$

Par la suite, nous écrirons

$$\vartheta_n^\star=\arg\inf_{\vartheta\in\Theta}\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i(\cdot)-\Lambda(\vartheta,\cdot)\right\|.$$

Nous établissons que sous certaines hypothèses l'EDM est consistant et asymptotiquement normal.

 ISSN 0825-0305

2.2 Consistance

Le théorème suivant assure la consistance de l'EDM dans les deux cas.

Théorème 2.1. *Si l'une des conditions* $\mathbf{C_1}$ *et* $\mathbf{C_2}$ *est satisfaites, alors l'estimateur de la distance minimale* $\theta_n^\star$ *est consistant, c'est à dire pour tout* $\delta > 0$ *on a :*

$$\mathbb{P}_{\theta_0}^{(n)}\left\{|\theta_n^\star - \theta_\mathbf{0}| > \delta\right\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Dans le premier cas, la preuve est similaire à la preuve donnée dans [18]. Pour démontrer ce théorème dans le deuxième cas, nous vérifions d'abord la condition d'identifiabilité

$$\psi(\delta, \vartheta_\mathbf{0}) = \inf_{|\vartheta-\vartheta_\mathbf{0}|>\delta} \|\Lambda(\vartheta, \cdot) - \Lambda(\vartheta_\mathbf{0}, \cdot)\| > 0.$$

Celle-ci résulte d'une modification du lemme [4, lemme 4.2]. De plus nous avons $\psi(\nu) > \kappa\nu$, où $\kappa > 0$ (voir Lemme 4.2 [4]). Ensuite, nous établissons (voir détails in [4])

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_{\theta_0}^{(n)}\left\{|\theta_n^\star - \theta_\mathbf{0}| > \delta\right\} \leq \\ &\mathbb{P}_{\theta_0}^{(n)}\left\{2\int_0^T \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_1^n (X_n(t) - \Lambda(\theta_\mathbf{0}, t))\right)^2 dt > \sqrt{n}\psi(\delta, \vartheta_\mathbf{0})\right\}.\end{aligned}$$

Finalement, en appliquant l'inégalité de Chebychev nous obtenons

$$\mathbb{P}_{\theta_0}^{(n)}\left\{|\theta_n^\star - \theta_\mathbf{0}| > \delta\right\} \leq \frac{4\int_0^T \Lambda(\theta_\mathbf{0}, t)\, dt}{n\ \left(\psi(\delta, \vartheta_\mathbf{0})\right)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{4}$$

2.3 Normalité Asymptotique

Dans cette section, nous allons prouver la convergence faible de l'estimateur de la distance minimale $\theta_\mathbf{n}^\star$ vers la loi normale. Dans le cas d'un seul saut nous avons le résultat suivant.

Théorème 2.2. *Si la condition* $\mathbf{C_1}$ *est satisfaite, alors l'estimateur de la distance minimale* $\vartheta_n^\star$ *est asymptotiquement normal, c'est-à-dire*

$$\sqrt{n}\,(\vartheta_n^\star - \vartheta_0) \Longrightarrow \mathcal{N}\big(\mathbf{0}\,,\, \mathcal{K}(\vartheta_0)\big)$$

où $\mathcal{K}(\vartheta_0)$ *est la matrice de covariance limite.*

La preuve de ce théorème est basée sur les preuves des résultats similaires présentés dans [2] et [18] où la matrice $\mathcal{K}(\vartheta_0)$ est ainsi définie.

Dans le cas où le modèle présente deux sauts la preuve est différente et nous donnons les détails. Nous définissons la fonction $G(\vartheta_0, t)$ pour tout $t \in [0, T]$ comme suit :

$$G\left(\vartheta_0, t\right) = \int_0^t g\left(\omega\ s + \psi\right)\ ds. \tag{5}$$

Soit les matrices carrées symétriques d'ordre 3 définies par :

$$\mathcal{A}(\vartheta_0) = \begin{pmatrix} A_{1,1}(\vartheta_0) & A_{1,2}(\vartheta_0) & A_{1,3}(\vartheta_0) \\ A_{2,1}(\vartheta_0) & A_{2,2}(\vartheta_0) & A_{2,3}(\vartheta_0) \\ A_{3,1}(\vartheta_0) & A_{3,2}(\vartheta_0) & A_{3,3}(\vartheta_0) \end{pmatrix}$$

et

$$\mathcal{C}(\vartheta_0) = \begin{pmatrix} C_{1,1}(\vartheta_0) & C_{1,2}(\vartheta_0) & C_{1,3}(\vartheta_0) \\ C_{2,1}(\vartheta_0) & C_{2,2}(\vartheta_0) & C_{2,3}(\vartheta_0) \\ C_{3,1}(\vartheta_0) & C_{3,2}(\vartheta_0) & C_{3,3}(\vartheta_0) \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{aligned}
A_{1,1}(\vartheta_0) &= \int_0^T G(\vartheta_0, t)^2 dt \\
A_{2,2}(\vartheta_0) &= \int_0^T \left(t\, g(\omega\, t + \psi) - \frac{1}{\omega} G\left(\vartheta_0, t\right)\right)^2\ dt \\
A_{1,2}(\vartheta_0) &= \int_0^T G(\vartheta_0, t) \left[t\, g(\omega\, t + \psi) - \frac{1}{\omega} G\left(\vartheta_0, t\right)\right]\ dt \\
A_{1,3}(\vartheta_0) &= \int_0^T G\left(\vartheta_0, t\right) \left[g(\omega\, t + \psi) - g(\psi)\right] dt \\
A_{2,3}(\vartheta_0) &= \int_0^T \left(t\, g(\omega\, t + \psi) - \frac{1}{\omega} G\left(\vartheta_0, t\right)\right) \left[g(\omega\, t + \psi) - g(\psi)\right] dt \\
A_{3,3}(\vartheta_0) &= \int_0^T \left(g(\omega\, t + \psi) - g(\psi)\right)^2 dt
\end{aligned}$$

et

 ISSN 0825-0305

$$
\begin{aligned}
C_{1,1}(\vartheta_0) &= \int_0^T \left(\int_t^T G(\vartheta_0, s)\; ds\right)^2 S(\vartheta_0, t)\; dt \\
C_{2,2}(\vartheta_0) &= \int_0^T \left(\int_t^T \left(s\, g(\omega\, s + \psi) - \frac{1}{\omega} G(\vartheta, s)\right) ds\right)^2 S(\vartheta_0, t)\; dt \\
C_{1,2}(\vartheta_0) &= \int_0^T \left[\int_t^T G(\vartheta_0, s)\; ds \int_t^T \left(r\, g(\omega\, r + \psi) - \frac{1}{\omega} G(\vartheta_0, r)\right) dr\right] \times \\
&\qquad \times S(\vartheta_0, t)\; dt \\
C_{1,3}(\vartheta_0) &= \int_0^T \left[\int_t^T G(\vartheta_0, s)\; ds \int_t^T \left(g(\omega\, r + \psi) - g(\psi)\right)\; dr\right] S(\vartheta_0, t)\; dt \\
C_{2,3}(\vartheta_0) &= \int_0^T \int_t^T \left(s\, g(\omega\, s + \psi) - \frac{1}{\omega} G(\vartheta_0, s)\right) ds\; \times \\
&\quad \times \int_t^T \left(g(\omega\, r + \psi) - g(\psi)\right)\; dr\; S(\vartheta_0, t)\; dt \\
C_{3,3}(\vartheta_0) &= \int_0^T \left(\int_t^T \left(g(\omega\, s + \psi) - g(\psi)\right)\; ds\right)^2 S(\vartheta_0, t)\; dt
\end{aligned}
$$

$\mathbf{C_3}$) *Le déterminant de la matrice $\mathcal{A}(\vartheta)$ est non nul*

Le théorème suivant assure la normalité asymptotique de l’EDM.

Théorème 2.3. *Si les conditions $\mathbf{C_2}$ et $\mathbf{C_3}$ sont satisfaites, alors l’estimateur de la distance minimale $\vartheta_n^\star$ est asymptotiquement normal, c’est-à-dire*

$$\sqrt{n}\,(\vartheta_n^\star - \vartheta_0) \Longrightarrow \mathcal{N}\big(\mathbf{0}\,,\, \Sigma(\vartheta_0)\big)$$

où $\Sigma(\vartheta_0)$ est la matrice de covariance limite définie dans (8).

Preuve : Introduisons la fonction $H_n(\vartheta_0)$ définie par

$$H_n(\vartheta_0) = \int_0^T \left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j(t) - \Lambda(\vartheta_0, t)\right]^2 dt,$$

nous avons

$$\mathbb{E}_{\vartheta_0} X_j(t) = \Lambda(\vartheta_0, t) = \int_0^t S(\vartheta_0, s)\, ds.$$

Par la loi des grands nombres

$$\hat{\Lambda}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j(t) \longrightarrow \Lambda(\vartheta_0, t).$$

 ISSN 0825-0305

On peut écrire

$$H_n(t,\vartheta) = \left[\hat{\Lambda}_n(t) - \gamma \int_0^t g(\omega\, s + \psi)\, dt + \lambda\, t\right]^2.$$

Notons : $\theta_n^\star = (\gamma_n^\star, \omega_n^\star, \psi_n^\star)$. La fonction $H_n(\vartheta)$ est dérivable par rapport à γ, ω et ψ. Ainsi, l'EDM $\theta_\mathbf{n}^\star$ minimise la fonction $H_n(\vartheta)$ et est consistant. Cet estimateur est une solution du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\gamma} H_n(\vartheta)\Big|_{\vartheta=\vartheta_n^\star} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial\omega} H_n(\vartheta)\Big|_{\vartheta=\vartheta_n^\star} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial\psi} H_n(\vartheta)\Big|_{\vartheta=\vartheta_n^\star} = 0, \end{cases}$$

nous avons

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\gamma}\Lambda(t,\vartheta) &=& \int_0^t g(\omega\, s+\psi)\, dt \\ \frac{\partial}{\partial\omega}\Lambda(t,\vartheta) &=& \frac{\gamma}{\omega}\left[t\, g(\omega\, t+\psi) - \frac{1}{\omega}\int_0^t g(\omega\, s+\psi)\, ds\right] \\ \frac{\partial}{\partial\psi}\Lambda(t,\vartheta) &=& \frac{\gamma}{\omega}\left[g(\omega\, t+\psi) - g(\psi)\right] \end{cases}$$

Le calcul de la dérivée de la fonction $H_n(\vartheta)$ par rapport à la variable γ donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\gamma} H_n(\vartheta) &= \frac{\partial}{\partial\gamma}\int_0^T \left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j(t) - \Lambda(t,\vartheta)\right]^2 dt \\ &= \int_0^T -2\frac{\partial}{\partial\gamma}\Lambda(\vartheta,t)\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j(t) - \Lambda(\vartheta,t)\right] dt \\ &= \int_0^T -2\int_0^t g(\omega\, s+\psi)\ \left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j(t) - \Lambda(\vartheta,t)\right] dt. \end{aligned}$$

Le calcul de la dérivée de la fonction $H_n(\vartheta)$ par rapport à la variable ω donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\omega} H_n(\vartheta) &= \frac{\partial}{\partial\omega}\int_0^T \left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j(t) - \Lambda(t,\vartheta_0)\right]^2 dt \\ &= \int_0^T -2\frac{\partial}{\partial\omega}\Lambda(\vartheta,t)\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j(t) - \Lambda(\vartheta,t)\right] dt \\ &= \int_0^T -2\frac{\gamma}{\omega}\left[t\, g(\omega\, t+\psi) - \frac{1}{\omega}\int_0^t g(\omega\, s+\psi)\, ds\right] \\ &\qquad \times \left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j(t) - \Lambda(\vartheta,t)\right] dt. \end{aligned}$$

Le calcul de la dérivée de la fonction $H_n(\vartheta)$ par rapport à la variable ψ donne :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\omega}H_n(\vartheta) &= \frac{\partial}{\partial\psi}\int_0^T \left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j(t) - \Lambda(t,\vartheta)\right]^2 dt \\
&= \int_0^T -2\frac{\partial}{\partial\psi}\Lambda(\vartheta,t)\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j(t) - \Lambda(\vartheta,t)\right] dt \\
&= \int_0^T -2\frac{\gamma}{\omega}\left[g(\omega\, t+\psi) - g(\psi)\right] \left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j(t) - \Lambda(\vartheta,t)\right] dt.
\end{aligned}$$

Alors le système devient

$$\begin{cases}
\int_0^T \left(\int_0^t g(\omega_n^\star\, s+\psi_n^\star)ds\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j(t) - \Lambda(\theta_n^\star,t)\right) dt &= 0 \\
\int_0^T \left(t\, g(\omega_n^\star\, t+\psi_n^\star) - \frac{1}{\omega_n^\star}\int_0^t g(\omega_n^\star\, s+\psi_n^\star)\, ds\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j(t) - \Lambda(\theta_n^\star,t)\right) dt &= 0 \\
\int_0^T \left(g(\omega_n^\star\, t+\psi_n^\star) - g(\psi_n^\star)\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j(t) - \Lambda(\theta_n^\star,t)\right) dt &= 0.
\end{cases}$$

Posons :

$$\begin{aligned}
G\left(\vartheta,t\right) &= \int_0^t g(\omega\, s+\psi)\, ds \\
H\left(\vartheta,t\right) &= t\, g(\omega\, t+\psi) - \frac{1}{\omega}G\left(\vartheta,t\right) \\
L\left(\vartheta,t\right) &= \left[g(\omega\, t+\psi) - g(\psi)\right]
\end{aligned}$$

Le système ci-dessus devient :

$$\begin{cases}
\int_0^T G\left(\theta_n^\star,t\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j(t) - \Lambda(\theta_n^\star,t)\right) dt &= 0 \\
\int_0^T H\left(\theta_n^\star,t\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j(t) - \Lambda(\theta_n^\star,t)\right) dt &= 0 \\
\int_0^T L\left(\theta_n^\star,t\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j(t) - \Lambda(\theta_n^\star,t)\right) dt &= 0
\end{cases}$$

ISSN 0825-0305

Insérons $\Lambda(\vartheta_0, t)$, le système s'écrit :

$$\begin{cases} \int_0^T G(\theta_n^\star, t)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j(t) - \Lambda(\vartheta_0, t) + \Lambda(\vartheta_0, t) - \Lambda(\theta_n^\star, t)\right) dt = 0 \\ \int_0^T H(\theta_n^\star, t)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j(t) - \Lambda(\vartheta_0, t) + \Lambda(\vartheta_0, t) - \Lambda(\theta_n^\star, t)\right) dt = 0 \\ \int_0^T L(\theta_n^\star, t)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j(t) - \Lambda(\vartheta_0, t) + \Lambda(\vartheta_0, t) - \Lambda(\theta_n^\star, t)\right) dt = 0 \end{cases}$$

Introduisons le processus $W_n(\cdot)$ défini par

$$W_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^n (X_j(t) - \Lambda(\vartheta_0, t))$$

On arrive à :

$$\begin{cases} \int_0^T G(\theta_n^\star, t)(W_n(t) - \sqrt{n}(\Lambda(\theta_n^\star, t)) - \Lambda(\vartheta_0, t))\, dt &= 0 \\ \int_0^T H(\theta_n^\star, t)(W_n(t) - \sqrt{n}(\Lambda(\theta_n^\star, t)) - \Lambda(\vartheta_0, t))\, dt &= 0 \\ \int_0^T L(\theta_n^\star, t)(W_n(t) - \sqrt{n}(\Lambda(\theta_n^\star, t)) - \Lambda(\vartheta_0, t))\, dt &= 0 \end{cases}$$

Le système devient :

$$\begin{cases} \int_0^T W_n(t) G(\theta_n^\star, t)\, dt = \sqrt{n}\int_0^T G(\theta_n^\star, t)(\Lambda(\theta_n^\star, t) - \Lambda(\vartheta_0, t))\, dt \\ \int_0^T W_n(t) H(\theta_n^\star, t)\, dt = \sqrt{n}\int_0^T H(\theta_n^\star, t)(\Lambda(\theta_n^\star, t) - \Lambda(\vartheta_0, t))\, dt \\ \int_0^T W_n(t) L(\theta_n^\star, t)\, dt = \sqrt{n}\int_0^T L(\theta_n^\star, t)(\Lambda(\theta_n^\star, t) - \Lambda(\vartheta_0, t))\, dt \end{cases} \tag{6}$$

Notons $\mathcal{A}_n = (A_{i,j}^{(n)})_{i,j=1,2,3}$, $Z_n^{(1)}$, $Z_n^{(2)}$ et $Z_n^{(3)}$ comme suit :

$$\begin{aligned}
Z_n^{(1)} &= \int_0^T W_n(t) G\left(\theta_n^\star, t\right)\, dt \\
Z_n^{(2)} &= \int_0^T W_n(t) H\left(\theta_n^\star, t\right)\, dt \\
Z_n^{(3)} &= \int_0^T W_n(t) L\left(\theta_n^\star, t\right)\, dt \\
A_{1,1}^{(n)}(\theta_n^\star) &= \int_0^T G\left(\theta_n^\star, t\right)^2\, dt \\
A_{1,2}^{(n)}(\theta_n^\star) &= \int_0^T G(\theta_n^\star, t) H\left(\theta_n^\star, t\right)\, dt \\
A_{1,3}^{(n)}(\theta_n^\star) &= \int_0^T G\left(\theta_n^\star, t\right)\, L\left(\theta_n^\star, t\right)\, dt \\
A_{2,2}^{(n)}(\theta_n^\star) &= \int_0^T H\left(\theta_n^\star, t\right)^2\, dt \\
A_{2,3}^{(n)}(\theta_n^\star) &= \int_0^T H\left(\theta_n^\star, t\right)\, L\left(\theta_n^\star, t\right)\, dt \\
A_{3,3}^{(n)}(\theta_n^\star) &= \int_0^T L\left(\theta_n^\star, t\right)^2\, dt.
\end{aligned}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
Z_n^{(1)} &= A_{1,1}^{(n)} u_{1,n}^\star + A_{1,2}^{(n)} u_{2,n}^\star + A_{1,3}^{(n)} u_{3,n}^\star \\
Z_n^{(2)} &= A_{2,1}^{(n)} u_{1,n}^\star + A_{2,2}^{(n)} u_{2,n}^\star + A_{2,3}^{(n)} u_{3,n}^\star \\
Z_n^{(3)} &= A_{3,1}^{(n)} u_{1,n}^\star + A_{3,2}^{(n)} u_{2,n}^\star + A_{3,3}^{(n)} u_{3,n}^\star.
\end{aligned}$$

ou encore sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} A_{1,1}^{(n)} & A_{1,2}^{(n)} & A_{1,3}^{(n)} \\ A_{2,1}^{(n)} & A_{2,2}^{(n)} & A_{2,3}^{(n)} \\ A_{3,1}^{(n)} & A_{3,2}^{(n)} & A_{3,3}^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{1,n}^\star \\ \mathbf{u}_{2,n}^\star \\ \mathbf{u}_{3,n}^\star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_n^{(1)} \\ Z_n^{(2)} \\ Z_n^{(3)} \end{pmatrix}.$$

Vu la consistance de l'EDM nous avons

$$\mathcal{A}_n = \begin{pmatrix} A_{1,1}^{(n)} & A_{1,2}^{(n)} & A_{1,3}^{(n)} \\ A_{2,1}^{(n)} & A_{2,2}^{(n)} & A_{2,3}^{(n)} \\ A_{3,1}^{(n)} & A_{3,2}^{(n)} & A_{3,3}^{(n)} \end{pmatrix} = \mathcal{A}\left(\vartheta_0\right) + \mathbf{o}\left(1\right).$$

Introduisons le vecteur $\mathbf{Z}_n = \left(Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)}, Z_n^{(3)}\right)^T$. Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
Z_n^{(1)} &= A_{1,1}(\vartheta_0)\ u_{1,n}^\star + A_{1,2}(\vartheta_0)\ u_{2,n}^\star + A_{1,3}(\vartheta_0)\ u_{3,n}^\star + o(1)\\
Z_n^{(2)} &= A_{2,1}(\vartheta_0)\ u_{1,n}^\star + A_{2,2}(\vartheta_0)\ u_{2,n}^\star + A_{2,3}(\vartheta_0)\ u_{3,n}^\star + o(1)\\
Z_n^{(3)} &= A_{3,1}(\vartheta_0)\ u_{1,n}^\star + A_{3,2}(\vartheta_0)\ u_{2,n}^\star + A_{3,3}(\vartheta_0)\ u_{3,n}^\star + o(1)
\end{aligned}$$

ou encore sous forme matricielle

$$\mathcal{A}(\vartheta_0)\ \mathbf{u}_n^\star = \mathbf{Z}_n + \mathbf{o}(1)$$

Cette matrice carrée d'ordre 3 est de déterminant non nul d'après la condition $\mathbf{C_3}$. Ce qui entraîne que $\mathcal{A}(\vartheta_0)$ est inversible.
Par la suite, on peut poser

$$\mathcal{B}(\vartheta_0) = \mathcal{A}(\vartheta_0)^{-1}$$

et donc

$$u_n^\star = \mathcal{B}(\vartheta_0)\,\mathbf{Z}_n + \mathbf{o}(1).$$

Nous avons

$$n\mathbf{E}_{\vartheta_0}\ (\vartheta_n^\star - \vartheta_0)\ (\vartheta_n^\star - \vartheta_0)^T = \mathcal{B}(\vartheta_0)\,\mathbb{E}_{\vartheta_0}\mathbf{Z}_n\mathbf{Z}_n^T\mathcal{B}(\vartheta_0)^T + \mathbf{o}(1).$$

Explicitons alors les termes de la matrice de covariance $\mathcal{C}(\vartheta_0) = \mathbb{E}_{\vartheta_0}\mathbf{Z}_n\mathbf{Z}_n^T$.

Nous avons :

$$\begin{aligned}
Z_n^{(1)} &= \int_0^T G(\theta_n^\star, t) W_n(t) dt\\
&= \int_0^T \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_1^n (X_n(t) - \Lambda(\theta_{\mathbf{0}}, t))\right) G(\theta_n^\star, t)\, dt\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_1^n \int_0^T (X_n(t) - \Lambda(\theta_{\mathbf{0}}, t))\ G(\theta_n^\star, t)\, dt\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_1^n \phi_j^{(1)}
\end{aligned}$$

De même, nous avons

$$\begin{aligned}
Z_n^{(2)} &= \int_0^T W_n(t)\left(t\, g(\omega_n^\star t + \psi_n^\star) - \frac{1}{\omega_n^\star} G(\theta_n^\star, t)\right) dt\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_1^n \int_0^T (X_n(t) - \Lambda(\theta_{\mathbf{0}}, t))\left(t\, g(\omega_n^\star t + \psi_n^\star) - \frac{1}{\omega_n^\star} G(\theta_n^\star, t)\right) dt\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_1^n \phi_j^{(2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_n^{(3)} &= \int_0^T W_n(t)\left(g(\omega_n^\star t+\psi_n^\star)-g(\psi_n^\star)\right)\,dt\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_1^n \int_0^T \left(X_n(t)-\Lambda(\theta_{\mathbf{0}},t)\right)\left(g(\omega_n^\star t+\psi_n^\star)-g(\psi_n^\star)\right)\,dt\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_1^n \phi_j^{(3)}.
\end{aligned}$$

Ce qui entraîne

$$\mathbf{E}_{\theta_0}\,\phi_1^{(l)}\phi_1^{(i)} = C_{l,i}\left(\vartheta_0\right), \qquad l,i=1,2,3. \tag{7}$$

Nous permet d'écrire que :

$$\mathcal{A}_n(\theta_n^\star)\xrightarrow[n\to\infty]{}\mathcal{A}(\vartheta_0).$$

$$Z_n^{(1)}\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}}\int_0^T W_n(t)G(\vartheta_0,t)dt\,,$$

$$Z_n^{(2)}\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}}\int_0^T W_n(t)\left(t\,g(\omega\,t+\psi)-\frac{1}{\omega}G\left(\vartheta_0,t\right)\right)\,dt\,,$$

$$Z_n^{(3)}\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}}\int_0^T W_n(t)\left(g(\omega\,t+\psi)-g(\psi)\right)\,dt.$$

Notons que les termes de la matrice $\mathcal{C}\left(\theta_0\right)$ peuvent être écrits différemment.

Soit $W\left(\cdot\right)$ est un processus de Wiener. Définissons trois intégrales stochastiques

$$Z^{(1)}=\int_0^T\left(\int_t^T G\left(\vartheta_0,s\right)\,ds\right)\,dW\left(\Lambda\left(\vartheta_0,t\right)\right)\,,$$

$$Z^{(2)}=\int_0^T\left(\int_t^T\left(t\,g(\omega\,s+\psi)-\frac{1}{\omega}G\left(\vartheta_0,s\right)\right)\,ds\right)\,dW\left(\Lambda\left(\vartheta_0,t\right)\right)\,,$$

et

$$Z^{(3)}=\int_0^T\left(\int_t^T\left(g(\omega\,s+\psi)-g(\psi)\right)\,ds\right)\,dW\left(\Lambda\left(\vartheta_0,t\right)\right).$$

Nous avons les relations suivantes

$$C_{l,i}\left(\vartheta_0\right)=\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left(Z^{(l)}Z^{(i)}\right).$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
C_{1,1}(\vartheta_0) &= \int_0^T \left(\int_t^T G(\vartheta_0, s)\ ds\right)^2 S(\vartheta_0, t)\ dt, \\
C_{2,2}(\vartheta_0) &= \int_0^T \left(\int_t^T [s\, g(\omega\, s+\psi) - \frac{1}{\omega} G(\vartheta, s)]ds\right)^2 S(\vartheta_0, t)\ dt \\
C_{1,2}(\vartheta_0) &= \int_0^T \left[\int_t^T G(\vartheta_0, s)\ ds \int_t^T [r\, g(\omega\, r+\psi) - \frac{1}{\omega} G(\vartheta_0, r)]\, dr\right] \times \\
&\times S(\vartheta_0, t)\ dt. \\
C_{1,3}(\vartheta_0) &= \int_0^T \left[\int_t^T G(\vartheta_0, s)\ ds \int_t^T (g(\omega\, r+\psi) - g(\psi))\, dr\right] S(\vartheta_0, t)\ dt \\
C_{2,3}(\vartheta_0) &= \int_0^T \int_t^T \left[s\, g(\omega\, s+\psi) - \frac{1}{\omega} G(\vartheta_0, s)\right] ds\, \times \\
&\quad \times \int_t^T g(\omega\, r+\psi) - g(\psi)\, dr\, S(\vartheta_0, t)\ dt \\
C_{3,3}(\vartheta_0) &= \int_0^T \left(\int_t^T g(\omega\, s+\psi) - g(\psi)\, ds\right)^2 S(\vartheta_0, t)\ dt
\end{aligned}$$

En effet, si on note $\pi(t) = X_1(t) - \Lambda(\vartheta_0, t)$

$$\begin{aligned}
\phi_1^{(1)} &= \int_0^T [X_1(t) - \Lambda(\vartheta_0, t)]\ G(\vartheta_0, t)\ dt \\
&= \int_0^T \int_0^T \chi_{\{0\le s\le t\}} [dX_1(s) - S(\theta_0, t)\, ds]\ G(\vartheta_0, t)\ dt \\
&= \int_0^T \int_s^T G(\vartheta_0, t)\ dt\ [dX_1(s) - S(\vartheta_0, t)\, ds] = \int_0^T \int_s^T G(\vartheta_0, t)\ dt\, d\pi(s).
\end{aligned}$$

Pour $\phi_1^{(2)}$ on a

$$\phi_1^{(2)} = \int_0^T \int_s^T \left[s\, g(\omega\, s+\psi) - \frac{1}{\omega} G(\vartheta, s)\right] dt\, d\pi(s).$$

Pour $\phi_1^{(3)}$ on a

$$\phi_1^{(2)} = \int_0^T \int_s^T [g(\omega\, s+\psi) - g(\psi)]\ dt\, d\pi(s).$$

Ainsi l'égalité (7) découle des propriétés de l'intégrale stochastique par rapport au processus de Poisson centré [18].

 ISSN 0825-0305

D'autre part en utilisant

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left[X_1(t)-\Lambda(\vartheta_0,t)\right]\left[X_1(s)-\Lambda(\theta_0,s)\right]=\Lambda(\vartheta_0,t\wedge s)$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left(\phi_1^{(1)}\right)^2 &= \int_0^T\int_0^T G(\vartheta_0,t)G(\theta_0,s)\Lambda(\vartheta_{\mathbf{0}},t\wedge s)\,dt\,ds\\
\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left(\phi_1^{(2)}\right)^2 &= \int_0^T\int_0^T \left[t\,g(\omega\,t+\psi)-\frac{1}{\omega}G(\vartheta_0,t)\right]\times\\
&\quad\times\left[s\,g(\omega\,s+\psi)-\frac{1}{\omega}G(\vartheta,s)\right]\Lambda(\theta_{\mathbf{0}},t\wedge s)\,dt\,ds\\
\mathbf{E}_{\vartheta_0}\phi_1^{(1)}\phi_1^{(2)} &= \int_0^T\int_0^T \left[G(\vartheta_0,t)\right]\left[s\,g(\omega\,s+\psi)-\frac{1}{\omega}G(\vartheta_0,s)\right]\times\\
&\quad\times\Lambda(\vartheta_{\mathbf{0}},t\wedge s)\;ds\,dt\\
\mathbf{E}_{\vartheta_0}\phi_1^{(1)}\phi_1^{(3)} &= \int_0^T\int_0^T \left[G(\vartheta_0,t)\right]\left[g(\omega\,s+\psi)-g(\psi)\right]\Lambda(\vartheta_{\mathbf{0}},t\wedge s)\;ds\,dt\\
\mathbf{E}_{\vartheta_0}\phi_1^{(2)}\phi_1^{(3)} &= \int_0^T\int_0^T \left[t\,g(\omega\,t+\psi)-\frac{1}{\omega}G(\vartheta_0,t)\right]\times\\
&\quad\times\left[g(\omega\,s+\psi)-g(\psi)\right]\Lambda(\vartheta_{\mathbf{0}},t\wedge s)\;ds\,dt\\
\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left(\phi_1^{(3)}\right)^2 &= \int_0^T\int_0^T \left[g(\omega\,t+\psi)-g(\psi)\right]\times\\
&\quad\times\left[g(\omega\,s+\psi)-g(\psi)\right]\Lambda(\vartheta_{\mathbf{0}},t\wedge s)\,dt\,ds
\end{aligned}$$

Par application du Théorème Central Limite, nous obtenons

$$\mathbf{Y}_n\Longrightarrow\mathcal{N}\left(\mathbf{0},\ \mathcal{C}(\vartheta_0)\right).$$

Comme

$$\sqrt{n}\left(\theta_n^\star-\vartheta_{\mathbf{0}}\right)=\mathcal{B}(\vartheta_0)\ \mathbf{Y}_n+\mathbf{o}(1),$$

on en déduit que

$$\mathbf{u}_n^\star=\sqrt{n}\left(\theta_n^\star-\vartheta_0\right)\Longrightarrow\mathcal{N}\left(0,\ \mathcal{B}(\vartheta_0)\ \mathcal{C}(\vartheta_0)\ \mathcal{B}(\vartheta_0)^T\right).$$

Ce qui est équivalent à

$$\sqrt{n}\left(\theta_n^\star-\vartheta_{\mathbf{0}}\right)\Longrightarrow\mathcal{N}\left(0,\ \Sigma(\vartheta_0)\right),$$

où

$$\Sigma(\vartheta_0)=\mathcal{A}^{-1}(\vartheta_0)\ \mathcal{C}(\vartheta_0)\ \mathcal{A}^{-1}(\vartheta_0). \tag{8}$$

□

 ISSN 0825-0305

3 Simulations

Soit $S(\vartheta,t)=\gamma\, g(\omega\, t+\psi)+\lambda,\quad 0\le t\le 1$ où $\lambda=1$ et la fonction

$$g(y)=\mathbb{1}_{\{y<2\}}+\frac{1}{4}\ \mathbb{1}_{\{2<y<3\}}+2\ \mathbb{1}_{\{y>3\}}. \tag{9}$$

La vraie valeur du paramètre à estimer est $\vartheta_0=\left(\gamma_0,\ \omega_0,\ \psi_0\right)=(2,3,1)$. Ainsi nous avons

$$\begin{aligned}S\big(\vartheta_0,t\big)&=\gamma_0\ \mathbb{1}_{\{0<t<\frac{2-\psi_0}{\omega_0}\}}+\frac{\gamma_0}{4}\ \mathbb{1}_{\{\frac{2-\psi_0}{\omega_0}<t<\frac{3-\psi_0}{\omega_0}\}}+2\gamma_0\ \mathbb{1}_{\{1>t>\frac{3-\psi_0}{\omega_0}\}}+\lambda\\&=2\ 1_{\{0\le t\le\frac{1}{3}\}}+\frac{1}{2}\ \mathbb{1}_{\{\frac{1}{3}<t\le\frac{2}{3}\}}+4\ \mathbb{1}_{\{\frac{2}{3}\le t\le 1\}}+1.\end{aligned}$$

On simule des processus de Poisson indépendants $X^{(n)}=(X_1,\ldots,X_n)$, $(X_j=(X_j(t),\ t\in[0,T]))$ pour $j=1,\ldots,n$ de la fonction d'intensité $S\big(\vartheta_0,t\big)$. Ensuite on calcule l'estimateur empirique de la moyenne

$$\widehat{\Lambda}_n(t)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j(t)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\big\{k;\ t_j^k<t\big\}=\frac{1}{n}\#\big\{(j,k)\,;\ t_j^k<t\big\}$$

Comme nous savons, que

$$\Lambda\left(\vartheta,;t\right)=\gamma\int_0^t g(\omega\, s+\psi)\ dt+\lambda\, t,$$

alors l'estimateur de la distance minimale $\vartheta_n^\star$ est défini par l'équation

$$\int_0^1\Big[\hat{\Lambda}_n\left(t\right)-\Lambda\left(\vartheta_n^\star,t\right)\Big]^2dt=\min_{\vartheta\in\Theta}\int_0^1\Big[\hat{\Lambda}_n\left(t\right)-\Lambda\left(\vartheta,t\right)\Big]^2dt.$$

Notre but est de calculer cet estimateur dans le cas d'intensité (9). A cet effet nous posons

$$\begin{aligned}f_1\big(\gamma,\omega,\psi\big)\ &=\ \int_0^1\ \Big[\hat{\Lambda}_n(t)-\Lambda\big(\gamma,\omega,\psi;\ t\big)\Big]^2\ dt\\&=\ J_1\ +\int_0^1\ \Lambda^2\big(\gamma,\omega,\psi;\ t\big)\ dt\\&\qquad\qquad-\frac{2}{n}\int_0^1\ \Lambda\big(\gamma,\omega,\psi;\ t\big)\ \hat{\Lambda}_n(t)\ dt\\&=\ J_1+\int_0^1\ \Lambda^2\big(\gamma,\omega,\psi;\ t\big)\ dt-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{N}\ i\ \int_{t_{i-1}}^{t_i}\ \Lambda\big(\gamma,\omega,\psi;\ t\big)\ dt\end{aligned}$$

 ISSN 0825-0305

Comme J_1 ne dépend pas de ϑ, la fonction à minimiser est

$$f\big(\gamma,\omega,\psi\big) \;=\; \int_0^1 \Lambda^2\big(\gamma,\omega,\psi;\ t\big)\,dt - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{N} i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Lambda\big(\gamma,\omega,\psi;\ t\big)\,dt$$

En tenant compte de (9), nous pouvons expliciter l'expression

$$\Lambda\big(\gamma,\omega,\psi;\ t\big) = \begin{cases} (\gamma+\lambda)\,t & \text{si} \quad \mathrm{t} < \frac{2-\psi}{\omega} \\ \gamma\,\frac{2-\psi}{\omega} + \frac{\gamma}{4}\big(\mathrm{t} - \frac{2-\psi}{\omega}\big) + \lambda\,\mathrm{t} & \text{si} \quad \frac{2-\psi}{\omega} < \mathrm{t} < \frac{3-\psi}{\omega} \\ \gamma + \frac{\gamma}{4\omega} + 2\gamma\,\big(t - \frac{3-\psi}{\omega}\big)\lambda\,t & \text{si} \quad t > \frac{3-\psi}{\omega} \end{cases} \tag{10}$$

Les grandes étapes pour la simulation sont :

– On observe des processus de Poisson indépendants d'intensité

$$S(\vartheta_0, t) = 2\,g(3\,t+1)+1, \quad 0 \le t \le T.$$

La vraie valeur est $\vartheta_0 = (\gamma_0,\omega_0,\psi_0) := (2,3,1)$.
Pour les calculs, nous prendrons $T = 5$ et l'intensité

$$S(\vartheta_0, t) = \mathbb{1}_{\{t<2\}} + \frac{1}{4}\,\mathbb{1}_{\{2<t<3\}} + 2\,\mathbb{1}_{\{t>3\}} + 1$$

On simule, en utilisant la méthode décrite dans [6], un échantillon de taille n : $X^{(n)} = (X_1,\cdots,X_n)$ de processus de Poisson

$$X_j = \{X_j(t),\ 0 \le t \le 5\}\,, \qquad 1 \le j \le\ n.$$

– On calcule $\widehat{\Lambda}_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \{k; t_j^k < t\} = \frac{1}{n}\#\{(j,k)/t_j^k < t\}$ et $\Lambda(\vartheta, t)$.

– En reprenant les formules explicites obtenues à la section précédente, on calcule la distance

$$d(\widehat{\Lambda}_n(\cdot), \Lambda(\vartheta,\cdot))$$

– Puis nous utilisons la méthode classique de minimisation Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS, voir par exemple [24], p. 324) pour déterminer le paramétre ϑ_n^* qui réalise le minimum.

$$\vartheta_n^\star = \arg\inf_{\vartheta\in\Theta} d(\widehat{\Lambda}_n(\cdot), \Lambda(\vartheta,\cdot)).$$

– On obtient ainsi un tableau de valeurs de $\vartheta_n^\star := (\gamma_n^*, \omega_n^*, \psi_n^*)$ pour certaines valeurs de n avec $\vartheta_0 = (\gamma_0,\omega_0,\psi_0) := (2,3,1)$ i.e. ; $\gamma_0 := 2, \omega_0 := 3, \psi_0 := 1$.

n	100	500	1.000	5.000	10.000	50.000
γ_n^*	$1,875048$	$2,066568$	$1,961190$	$2,019137$	$2,029559$	$1,997505$
ω_n^*	$2,161846$	$3,307863$	$3,128797$	$2,958313$	$3,063955$	$2,999383$
ψ_n^*	$1,567856$	$0,768785$	$0,922411$	$1,015445$	$0,954347$	$1,000109$

n	100.000	500.000	1.000.000	5.000.000	10.000.000	50.000.000
γ_n^*	$1,993025$	$1,997505$	$1,997522$	$2,000817$	$2,000392$	$2,000587$
ω_n^*	$2,998614$	$2,999383$	$2,999815$	$2,999798$	$3,000144$	$2,999921$
ψ_n^*	$0,999968$	$1,000109$	$1,001000$	$1,000032$	$1,000041$	$1,000005$

– Enfin, ces valeurs montrent bien que la suite des $\vartheta_n^\star$ converge bien vers ϑ_0.

Références

[1] Aubry, C.,*Estimation Paramétrique par la Méthode de la Distance Minimale pour les Processus de Poisson et de Diffusion*, thèse de doctorat mathématiques de l'université du Maine, Le Mans, 1997.

[2] Aubry, C. and Dabye, A.S., *Asymptotic normality of the minimum distance estimators for a Poisson process with a discontinuous intensity function*, Journal of Statistical Planning and Inference 99, pp. 3–23, 2001.

[3] Ba D. B., *Estimation Paramétrique par la Méthode de la Distance Minimale pour les Processus de Poisson d'Intensité Discontinue* , thèse de doctorat mathématiques de l'Université Gaston Berger, Saint-Louis, 2008.

[4] Ba, D.B. and Dabye A.S., *On Regular properties of the MDE for non smooth model of Poisson process*, soumis pour publication.

[5] BA D.B, DABYE A.S and DIOP F.N., *Sur l'estimation d'un paramètre d'intensité discontinue pour un processus de Poisson*, admis pour publication aux Annales de l'I.S.U.P.

[6] BA D.B, DABYE A.S, DIAKHABY A and DIOP F.N., *Comportement asymptotique des estimateurs de paramètre d'un processus de Poisson pour un modèle non régulier*, no. 3, série C, Annales de l'Université de N'Djamena.

[7] Cox, D.R. and Lewis, P.A.W., *The Statistical Analysis of Series of Events*, Methuen, London, 1966.

[8] Dabye, A.S., *Estimation Paramétrique pour un Processus de Poisson d'Intensité Discontinue* , thèse de doctorat mathématiques de l'université du Maine, Le Mans, 1999.

[9] Dabye, A.S., *Estimation paramétrique bidimensionnelle pour un processus de Poisson d'intensité discontinue*, Annales de l'I.S.U.P., XXXXVII, fasc. 1 et 2, 2003.

[10] Dabye, A.S., *Propriétés de l'EDM pour un processus de Poisson d'intensité discontinue*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342, pp. 431-436, 2006.

[11] Daley, D.J. and Vere-Jones, D., *An Introduction to the Theory of Point Processes*, Springer, New York, 1988.

[12] Farinetto C., *Estimation Paramétrique d'Intensités de Processus de Poisson Spaciaux Non Homogènes*, thèse de doctorat mathématiques de l'université du Maine, Le Mans, 2001.

[13] Huber, P., *The behavior of the maximum likelihood estimates under non standard conditions*, In Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1, 221-233.

[14] Ibragimov, I.A. and Khasminskii, R.Z., *Statistical Estimation. Asymptotic Theory*, Springer, New York, 1981.

[15] Karr, A.F., *Point Processes and Their Statistical Inference (second edition)*, Marcel Dekker, New York, 1991.

[16] Kutoyants, Yu.A., *Parameter Estimation for Stochastic Processes*, Heldermann-Verlag, Berlin, 1984.

[17] Kutoyants, Yu.A. and Liese F., *On minimum distance estimation for spatial Poisson processes*, Ann. Academiae Scient. Fennicae, ser.A, I, v.17, pp. 65–71, 1992.

 ISSN 0825-0305

[18] Kutoyants, Yu.A., *Statistical Inference for Spatial Poisson Processes*, Lecture Notes in Statistics 134, Springer-Verlag, New York, 1998.

[19] Lewis, P.A.W., (Ed.) *Stochastic Point Processes*, Wiley, New York, 1972.

[20] Millar, W.P., *Robust estimation via minimum distance methods*, Z. Wahr. **55**, pp. 76–89, 1971.

[21] Millar, W.P., *The minimax principle in asymptotic statistical theory*, Lecture Notes in Mathematics 976, pp. 76–262, Springer-Verlag, New York, 1983.

[22] Millar, W.P., *A general approach to the optimaly of minimum distance estimator*, Trans. Amer. Math. Soc. 286, pp. 377–418, 1984.

[23] Parr, W.C., *Minimum Distance Estimation : A Bibliography*, Commun. Statist. Theor. Meth., A 10 (12), pp. 1205–1224, 1981.

[24] Press,W.H., Flannery, B.P., Teukolsky,S.A., Vetterling, W.T. *Numerical Recipes in C, The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 1988.

[25] Snider, D.R. and Miller, M.I., *Random Point Processes in Time and Space*, Springer, New-York, 1991.