



## **Modélisation d'impulsions lasers ultra-brèves**

**M. KHELLADI\* et O. SEDDIKI**

*Laboratoire de télécommunication (TTL), Département d'électronique, Faculté des sciences de l'ingénieur, Université A.B.Bekr Belkaid, BP 119 Tlemcen, (Algérie)*

---

\* Correspondance, courriel : [khelladi.photonic@yahoo.fr](mailto:khelladi.photonic@yahoo.fr)

### **Résumé**

Des méthodes de caractérisation d'impulsions lasers femtoseconde sont développées afin d'étudier leur propagation dans la matière. De telles impulsions présentent obligatoirement un étalement spectral considérable, et donc difficiles à utiliser. Ce travail consiste à étudier la propagation d'impulsions lasers ultra-brèves dans un matériau transparent. Notre travail est divisé en deux parties : la première partie sera consacrée à l'analyse par la méthode des ondes planes. La deuxième partie consiste à élaborer un modèle mathématique basé sur la technique d'ondelettes pour bien décrire les effets de dispersion chromatique, du facteur de propagation  $k(\omega)$  sur le profil et la phase. Cette dernière méthode s'avère être un outil très puissant pour résoudre ce problème de dispersion chromatique.

**Mots-clés :** *Indice de réfraction, impulsion femtoseconde, dispersion chromatique, chirp, analyse de Fourier, décomposition en ondelettes.*

### **Abstract**

#### **Ultra-short lasers pulses modelling**

Methods of characterization of femtoseconde laser pulses are developed to study their propagation in the matter. Such pulses present necessary a considerable spectral bandwidth, and thus difficult to use. This work consists with the linear optics of the ultra-short pulses, i.e. with their linear propagations in transparent materials. Our work is divided in two parts : the first part will be devoted to the analysis by the method of the plane waves and will be shown the insufficiency of this method for ultra-short laser pulses. The second part or our objective of research is carried out to find a model

**M. KHELLADI et O. SEDDIKI**

mathematical based on the wavelet technique for good to write the effects of chromatic dispersion of the factor of propagation on the profile and the phase. This method proves to be a very powerful tool to solve this problem of chromatic dispersion.

**Keywords :** *Refraction index, femtosecond pulse, chromatic dispersion, chirp, Fourier analysis, wavelet analysis.*

## 1. Introduction

Aujourd'hui, l'optique est le domaine de la physique le plus apte à concevoir les schémas de transports d'informations sur de longues distances et avec des débits élevés. L'utilisation d'impulsions lumineuses très brèves permet de convoier très rapidement un nombre considérable d'informations par seconde. Les liaisons optiques actuelles sont très performantes puisque les débits peuvent dépasser le Tbit/s grâce aux propriétés particulières des fibres optiques, aux progrès effectués sur les amplificateurs, et à l'emploi de différentes techniques de multiplexage temporel (TDM) et/ ou fréquentiel (WDM, DWDM) [1].

L'optique ultra-rapide s'établit comme un champ de recherches important dans les années 1970, faisant suite à l'invention du laser en 1960. Cependant, c'est seulement ces dernières années que la conception de lasers très compacts délivrant des impulsions picoseconde ou femtoseconde s'est confirmée. L'utilisation d'impulsions ultra-rapides a une multitude d'avantages potentiels, en effet, elles incluent la possibilité d'utiliser l'intégralité de la non-linéarité du matériau par leur intensité extrêmement élevée. Ceci est essentiel dans le développement de dispositifs tout-optiques efficaces de commutation et de modulation, sans augmenter la puissance moyenne nécessaire.

Une impulsion optique ultracourte occupe une distance extrêmement courte dans l'espace et se propage à la vitesse de la lumière, ce qui signifie la possibilité de commander précisément le retard temporel dans une petite dimension, et donc de miniaturiser le système optique global. De plus, ce type d'impulsions présente une grande largeur spectrale due à l'interdépendance des domaines temps-fréquence déduite de la transformée de Fourier. Cette propriété permet l'application de nombreuses fonctions photoniques telles que la division et la conversion de longueurs d'onde, mais également la mise en forme d'impulsions. Ces nouvelles sources ultra-compactes sont devenues donc très appropriées pour un usage répandu dans les communications, la détection, l'usinage et les applications médicales. A leur tour, celles-ci ont été complétées par le développement de nouvelles technologies optiques d'amplification, de traitement et de commutation des signaux [2].

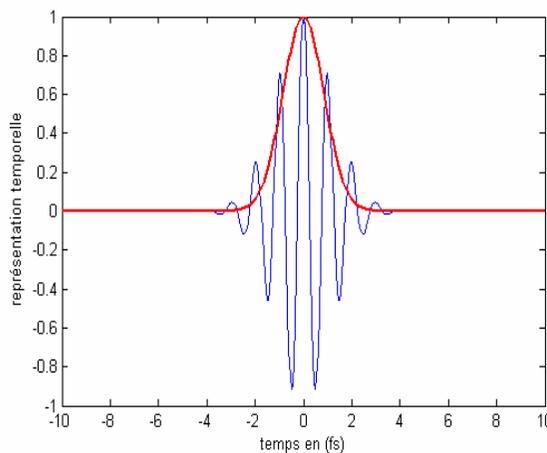
Une des activités les plus courantes dans le domaine des communications par fibres optiques réside dans la recherche des moyens permettant de repousser les limites physiques liées à la propagation des impulsions optiques (de plus en plus brèves) dans les fibres en silice. Cette activité vise à croître la portée des systèmes de communication. La propagation d'impulsions ultra-brèves s'accompagne toujours d'un grand nombre de phénomènes physiques agissant simultanément mais avec généralement des impacts très différents sur le système (limite le débit d'information, atténuation du signal, ...). Le problème consiste alors dans chaque situation, à identifier, parmi tous ces phénomènes, celui qui dégrade le plus la performance du système, et ensuite trouver le moyen de combattre ce phénomène [3]. Nous analyserons la propagation d'une impulsion gaussienne dans un milieu dispersif après avoir dérivé l'équation de propagation de l'enveloppe d'un signal optique [4].

## 2. Fondements théoriques

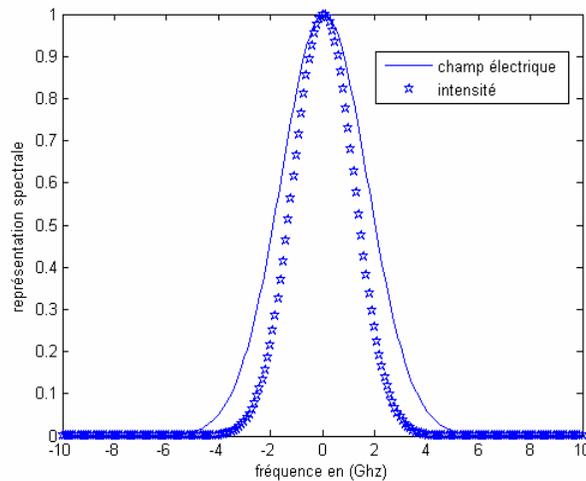
### 2-1. Impulsions modulées en phase

Le champ électrique  $E(t)$  d'une impulsion **Figure 1.a** et son spectre en fréquence  $E(\omega)$  **Figure 1.b** sont reliés par la transformée de Fourier sous la forme générale.

$$E(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(\omega).e^{-j\omega t} d\omega \quad \text{et} \quad E(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t).e^{+j\omega t} dt \quad (1)$$



**Figure 1a :** *Le champ électrique  $E(t)$  d'une impulsion*



**Figure 1b :** Le spectre en fréquence  $E(\omega)$

Du fait des facilités de calcul de sa transformée de Fourier, le modèle le plus couramment utilisé pour représenter l'enveloppe du champ électrique est la gaussienne :

$$E(t) = E_0 \exp\left[-\left(\frac{t}{\tau_0}\right)^2\right] \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) \quad (2)$$

La fréquence instantanée s'écrit alors :

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} \quad (3)$$

La phase  $\varphi(t)$  peut être une fonction aléatoire du temps ou bien définie de façon plus ou moins compliquée. On se limite au cas où la phase varie de façon quadratique avec le temps, la fréquence instantanée présente une variation linéaire.

Cette impulsion présente un profil temporel d'intensité dont la largeur à mi-hauteur vaut:

$$\Delta t_{FWHM} = 2 \cdot \tau_0 \sqrt{\ln 2} \quad (4)$$

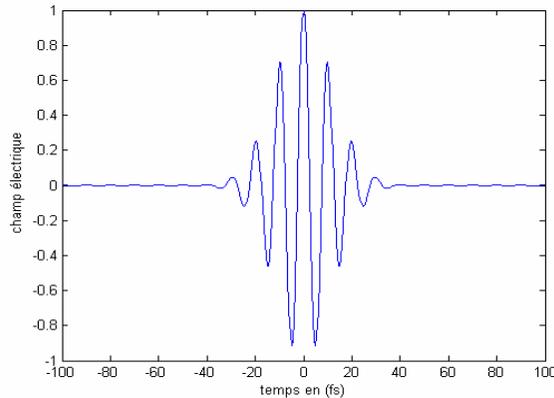
et une distribution de fréquence dont la largeur à mi-hauteur vaut :

$$\Delta \nu_{FWHM} = \frac{1}{\tau_0 \cdot \pi} \sqrt{2 \cdot \ln 2} \quad (5)$$

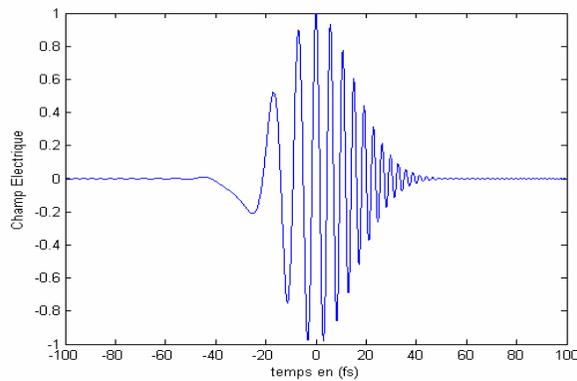
En conséquence, son produit largeur temporel -largeur spectrale est égal à :

$$\Delta t_{FWHM} \cdot \Delta \nu_{FWHM} = 0.441 \quad (6)$$

Lorsque cette impulsion **Figure 2.a** est réfléchiée par une surface dispersive (Miroir à couches multi-diélectrique) ou transmise au travers d'un milieu dispersif, ses composantes spectrales sont multipliées par une fonction d'amplitude  $A(\omega)$  et affectées par une fonction de phase  $\phi(\omega)$ . L'impulsion **Figure 2.b** résultante peut être calculée par la transformée de Fourier inverse :



**Figure 2a :**



**Figure 2b :**

Après propagation à travers un milieu dispersif d'indice de réfraction  $n(\omega)$ , le spectre en fréquence reste inchangé, à l'exception d'un terme de phase entre les différents composantes spectrales constituant l'impulsion.

En un point quelconque dans le milieu, le spectre en fréquence s'écrit alors :

$$E(\omega, z) = E(\omega, z = 0) \times \exp[j\phi(\omega)] \tag{7}$$

avec  $\varphi(w)$  donnée par l'expression (9)

$$E(t, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(w, z=0) \cdot A(w) \cdot e^{-j\varphi(w)} e^{j\omega t} dw \quad (8)$$

Dans notre travail on s'intéresse seulement au phénomène de dispersion ( $A(w) = cste$ ).

### 3. Propagation d'impulsions laser en milieu dispersif

Nous étudierons le comportement d'une impulsion laser ultra-brève au cours de sa propagation dans un milieu matériel. A partir de l'expression du champ électrique dans le domaine spectral (équation 2), on inclura les variations fréquentielles du facteur de propagation  $k(w)$ . En considérant ces faibles variations comme des perturbations, on effectuera alors un développement en série de Taylor autour de la fréquence centrale  $w_0$  de ces paramètres ; puis par transformation de Fourier inverse, on obtiendra l'expression du champ perturbé [5].

$$E(z, w) = E(\omega, z=0) \exp[-j\varphi(w)] \quad (9)$$

avec  $\varphi(w) = k(w) \cdot z$

Dans une première étape, nous allons considérer le cas où l'on se place dans l'approximation des ondes planes ; i.e  $\Delta w \ll w_0$ .

Soit la fonction de phase appliquée aux composantes spectrales, définie par la série de Taylor à l'ordre deux :

$$\varphi(w) = \varphi(w_0) + \frac{d\varphi}{dw} (w - w_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2\varphi}{dw^2} (w - w_0)^2 + \dots \theta(w) \quad (10)$$

$\varphi^{(n)} = k^{(n)} z$  où les  $k^{(n)}$  sont les dérivées d'ordre  $n$  de  $k$  par rapport à  $w$  en  $w_0$  avec  $w_0$  fréquence centrale.

Le champ électrique perturbé est donné par la transformée de Fourier inverse :

$$E(t, z) = TF^{-1}\{E(w, z)\} = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} E(w, z=0) \exp[j\varphi(w)] \exp(j\omega t) dw$$

$$\Rightarrow E(t, z) = E_0 \sqrt{\frac{\Gamma(z)}{\pi}} \cdot \exp \left[ \underbrace{-\Gamma(z) \left( t - \frac{z}{V_g(w_0)} \right)^2}_{\alpha} \right] \cdot \exp \left[ \underbrace{j w_0 \left( t - \frac{z}{V_\varphi(w_0)} \right)}_{\beta} \right] \quad (11)$$

Avec 
$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{\Gamma_0} + 2j\varphi^{(2)}$$

$$V_\varphi(w_0) = \frac{w_0}{k_0} \text{ et } V_g(w_0) = \left[ \frac{dw}{dk} \right]_{w=w_0}$$

L'expression (11) du champ électrique fait apparaître un terme  $\beta$  de phase linéaire, montrant que celle-ci est retardée de  $\frac{z}{V_\varphi}$ , sans incidence puisqu'on ne peut pas la mesurer.

Le terme  $\alpha$  montre que l'enveloppe du paquet d'onde est retardée de  $z/V_g$ . Le profil temporel de l'impulsion reste gaussien tout en subissant une dispersion de la vitesse de groupe à travers le changement du facteur de forme  $\Gamma(z)$ .

La largeur temporelle de l'impulsion au point  $z$  :

$$\Delta\tau_z = \Delta\tau_0 \sqrt{1 + 4(\Gamma.k^{(2)}.z)^2} \tag{12}$$

Avec 
$$k^{(2)} = \frac{\lambda^3}{2.\pi.c^2} \frac{d^2n}{d\lambda^2} \qquad \Gamma = \frac{2 \log 2}{\Delta\tau_0^2}$$

Le premier terme n'ajoute qu'un déphasage, il est intéressant de constater que le deuxième terme, lui non plus, ne change pas la forme de l'impulsion.  $E(t, z)$  à la même forme que  $E(t, z = 0)$ , mais se trouve simplement retardé de :

$$tg = \frac{d\varphi}{dw} \tag{13}$$

C'est le terme suivant,  $\frac{d^2\varphi}{dw^2}$ , qui provoque la diffusion de l'impulsion et son balayage de fréquence (chirp en Anglais).

**3-1. Application dans la silice**

L'indice de la silice est donné par l'expression suivante [6] :

$$n^2(w) = 1 + \sum_{j=1}^3 \frac{B_j w_j^2}{w_j^2 - w^2} \tag{14}$$

Avec :

$B_1 = 0.6961663 ;$	$\lambda_1 = 0.0684043 \mu\text{m}$
$B_2 = 0.4079426 ;$	$\lambda_2 = 0.1162414 \mu\text{m}$
$B_3 = 0.8974794 ;$	$\lambda_3 = 9.896161 \mu\text{m}$

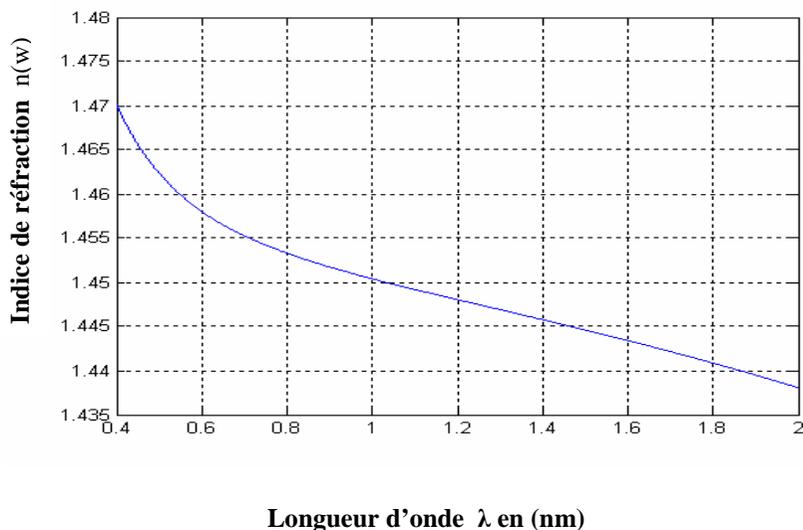
où  $w_j$  est la fréquence de résonance et  $B_j$  est l'amplitude de résonance.

Dans le cas des fibres optiques, les paramètres  $w_j$  et  $B_j$  sont contenus expérimentalement.

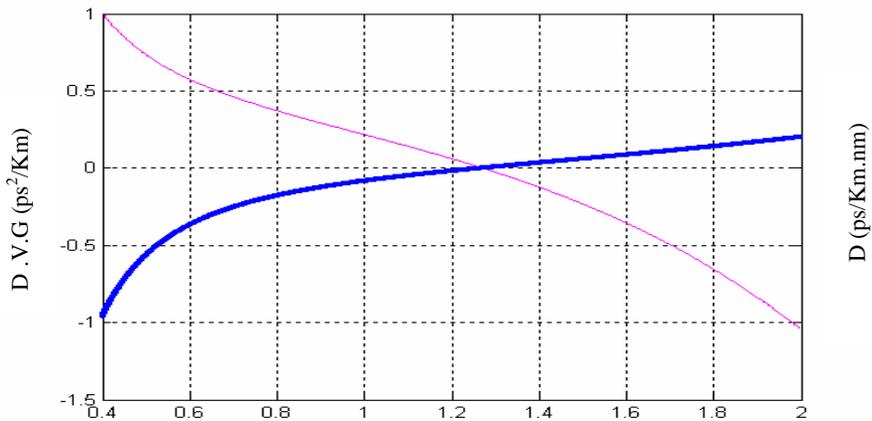
Exprimons la vitesse de groupe et la dispersion de la vitesse de groupe en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$ , à partir des expressions  $k(w) = n(w)\frac{w}{c}$  et  $w = \frac{2\pi}{\lambda}c$

$$V_g = \frac{c}{n(\lambda) - \lambda \frac{dn(\lambda)}{d\lambda}} \approx \frac{c}{n(\lambda)} \left[ 1 + \frac{\lambda}{n(\lambda)} \frac{dn(\lambda)}{d\lambda} \right] \quad (15)$$

L'indice de réfraction de la silice est entre 1.47 -1.45 dans le domaine de visible comme montre la **Figure 3** ci-dessous.



**Figure 3a :** Variation de l'indice de réfraction de la silice en fonction de la longueur d'onde



**Figure 3b :** Variation du coefficient de dispersion  $k^{(2)}$  de la silice et le paramètre de dispersion  $D$  (en trait gras)

La **Figure 3** montre que, le quartz présente un minimum de dispersion à la longueur d'onde  $\approx 1300\text{nm}$ . Dans les régions où la concavité est positive (respectivement négative)  $\frac{d^2n}{d\lambda^2} > 0$ , on parle de dispersion positive (respectivement négative).

### 3-2. Paramètre de dispersion

On peut définir aussi le coefficient CD gouvernant la dérive de fréquence tel que :

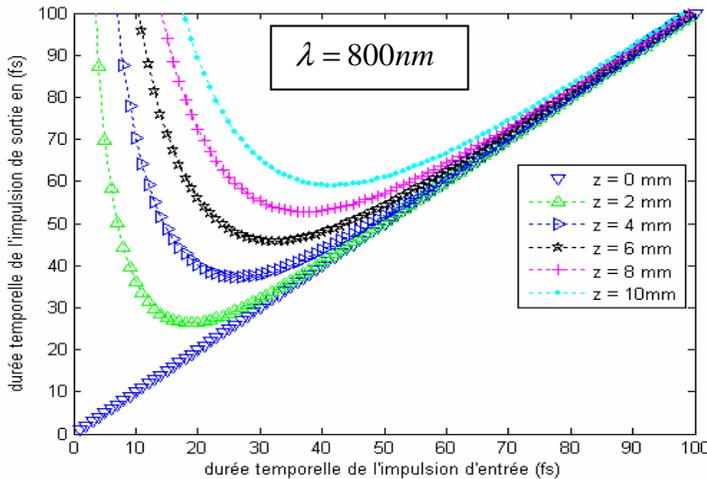
$$C_D = \frac{z}{D} \quad \text{avec} \quad D = \frac{\Delta_0^2}{2.K^{(2)}} \quad (16)$$

$D$  est appelé paramètre de dispersion. Ce paramètre mesure l'importance relative de la dispersion chromatique.  $z$  est la longueur du milieu traversé par l'impulsion laser [7] :

- Si  $z < D$ , la dispersion de la vitesse de groupe est négligeable.
- Si  $z > D$ , il faut tenir compte des effets dispersifs.

La **Figure 4**, montre l'élargissement temporelle d'une impulsion transformée limite pour différentes valeurs de la longueur de propagation. On remarque que l'élargissement de la durée des impulsions est indépendant du signe du coefficient de dispersion.

Au premier lieu nous avons limité seulement à l'ordre deux de la série de Taylor de la phase. On remarque que l'analyse de Fourier reste valable seulement pour des durées d'impulsion qui sont supérieures à  $\approx 60$  fs.



**Figure 4 :** *Elargissement temporelle d'une impulsion transformée limite pour différentes valeurs de la longueur de propagation*

Dans une deuxième cas, nous allons déterminer le développement en série de Taylor de la phase jusqu'à l'ordre (6) et voir l'influence des termes supérieurs à deux sur le profil temporel d'une impulsion gaussienne.

$$\varphi(w) = \varphi(w_0) + (w - w_0) \left. \frac{d\varphi}{dw} \right|_{w_0} + \frac{1}{2} (w - w_0)^2 \left. \frac{d^2\varphi}{dw^2} \right|_{w_0} + \dots + \frac{1}{n!} (w - w_0)^n \left. \frac{d^n\varphi}{dw^n} \right|_{w_0} + \theta(w) \quad (17)$$

Nous pouvons écrire  $\varphi^{(i)} = \frac{d^i \varphi}{dw^i}$  sous la forme d'une récurrence, permettant d'obtenir  $\varphi^{(i)}$  en fonction des dérivées d'ordre  $i - 1$ , de l'indice de réfraction. Sous une forme matricielle, on peut écrire ; jusqu'à l'ordre 6 :

$$\begin{bmatrix} \varphi^{(2)} \\ \varphi^{(3)} \\ \varphi^{(4)} \\ \varphi^{(5)} \\ \varphi^{(6)} \end{bmatrix} = (-1)^n \cdot 2\pi \cdot z \left[ \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot c} \right]^n \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 60 & 60 & 15 & 1 & 0 \\ 360 & 480 & 180 & 24 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Les différents termes de la série de Taylor à l'ordre n peuvent s'écrire sous la forme d'une matrice [A], dont nous pouvons exprimer les différents termes Aij.

$$\varphi(w) = \varphi(w_0) + (w - w_0)\varphi^{(1)} + \sum_{i=2}^p \frac{1}{i!}(w - w_0)^i \cdot \varphi^{(i)} \Big|_{w=w_0} + \theta(w)$$

$$\varphi^{(p)} = (-1)^p \cdot 2\pi \cdot z \left[ \frac{\lambda}{2\pi \cdot c} \right]^p \sum_{j=2}^p \lambda^{j-1} \cdot A(p-1, j-1) n^{(j)} \quad \text{avec } p > 2 \quad (19)$$

$$n^{(j)} = \left. \frac{d^j n}{d\lambda^j} \right|_{w=w_0}$$

$$A(i,1) = \frac{(i+1)!}{2}$$

$$A(i,1) = 1$$

$$A(i, j) = A(i-1, j-1) + (i+j) \cdot A(i-1, j).$$

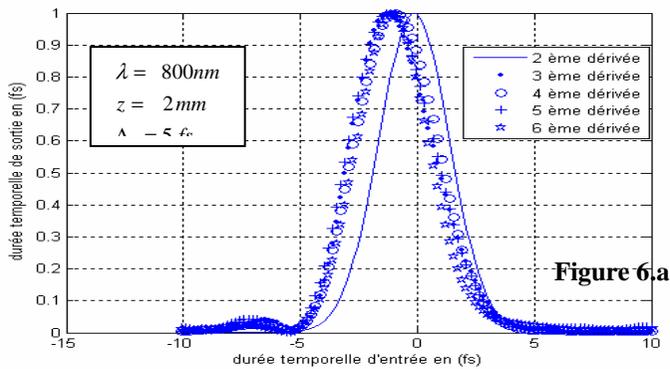


Figure 5a :

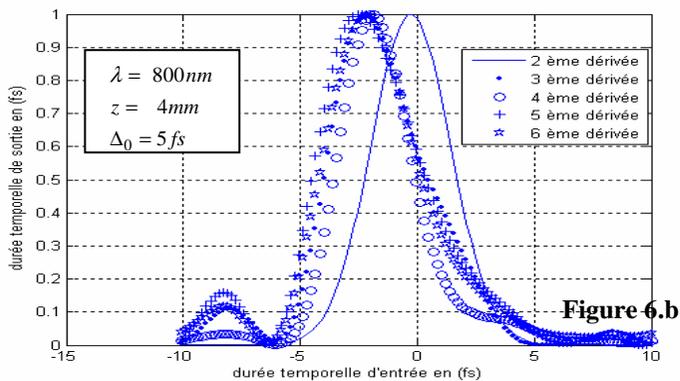


Figure 5b :

La **Figure 5a**, montre bien que les ordres supérieurs d'une part, présentent aussi un élargissement de l'impulsion et d'autre part, ses dérivées montrent qu'ils existent une sorte de compensation **Figure 5b**.

### Interprétation

Le théorème de Fourier est extrêmement une approche classique pour décrire la propagation des signaux électromagnétiques à travers un milieu dispersif. Dans le cas des signaux caractérisés par une faible variation d'enveloppe temporel, la phase est généralement approximé par le premier et le deuxième terme de la série de Taylor au voisinage de la fréquence centrale de l'impulsion d'entrée. Pour des impulsions ultra-brèves, le concept de la vitesse de groupe est hors de propos et la distorsion d'enveloppe est une fonction des termes d'ordres supérieurs.

Les impulsions ultra-brèves inférieures à 10 fs sont maintenant disponibles. Leur enveloppe harmonique satisfaite est aussi haute que l'expansion de la série de Taylor de la phase est ni plus possible. Cependant cette méthode ne permet pas la compréhension physique directe de l'enveloppe de propagation et principalement n'est pas figurer le fait que c'est la dispersion de la vitesse de groupe laquelle générer la distorsion des impulsions ultra-brèves. Telle, une situation qui exige un autre type de décomposition compliqué, consiste à faire une représentation temps-fréquences.

Nous proposons ici une méthode dérivée à partir de la transformée de Gabor dans l'ordre de décomposer le signal en une infinité de nombre élémentaire de composants ondelette (Wavelet) de même durée (beaucoup plus longue que le signal original), chacune de ces elles étant centré à une fréquence  $\Omega$  appartenant au spectre de Fourier de l'impulsion [5].

## 4. Techniques d'ondelettes

### 4-1. Théorie sur les ondelettes

La transformée d'ondelettes reste ainsi très indiquée pour l'analyse des bruits cardiaques (normaux et pathologiques). Cette technique à montré son efficacité dans l'analyse temps-fréquence due à sa fenêtre d'analyse de dimensions souple et adaptative ce qui lui permet d'avoir une bonne résolution temporelle pour les composantes hautes fréquences et une bonne résolution fréquentielle pour les composantes basses fréquences.

La transformation en ondelette permet d'appliquer une analyse multirésolution sur le

signal étudié. L'analyse multirésolution de la transformation en ondelettes équivaut à une décomposition atomique temps-échelle. Les ondelettes sont de forme constante mais de taille variable, proportionnelle au paramètre de dilatation. La transformation en ondelettes est aussi interprétée comme étant un processus de filtrage du signal analysé par un filtre passe-bande de bande passante variable.

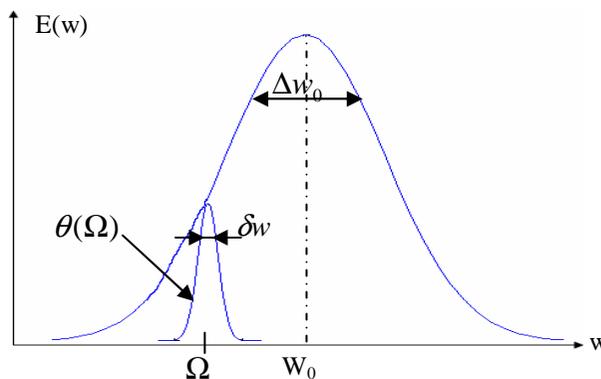
La représentation temps-échelle n'est pas une limitation de la transformation en ondelettes, mais elle est une autre manière d'aborder l'analyse du signal par un regroupement d'informas fréquentielles et temporelles. Il est à noter que la durée de l'ondelette est directement proportionnelle au paramètre d'échelle. Dans sa formulation, la transformée en ondelettes peut s'interpréter comme une analyse à banc de filtres à surtension constante. Dans un tel banc, chacun des filtres (passe-bande) peut se déduire d'un gabarit unique par une dilatation ou compression en fréquence [8].

Le géophysicien *Jean Morlet* a proposé en 1983, un procédé révolutionnaire, l'analyse et la synthèse par les ondelettes, qui permet d'analyser efficacement des signaux ou se combinent des phénomènes d'échelles très différents. Les ondelettes sont des fonctions élémentaires très particulières, ce sont les vibrations les plus courtes et les plus élémentaires que l'on puisse envisager. On peut dire que l'ondelette est effectuée un zooming sur n'importe quel phénomène intéressant du signal qu'a lieu à une échelle petite au voisinage du point considéré [9-10].

#### 4-2. Technique des ondelettes

Nous allons procéder de la manière suivante :

Taillons dans le spectre en fréquence  $E(w, z = 0)$  un groupe étroit en fréquence gaussien, de paramètre  $\Omega$  et centré autour de  $\Omega$  [11].



**Figure 6 :** *Décomposition de l'impulsion gaussienne en un ensemble d'ondelettes*

Le champ de l'ondelette est aussi gaussien de la forme

$$\theta(\Omega) = E(w) \cdot \exp\left[-\frac{(w-\Omega)^2}{4\gamma}\right] \text{ avec } E(w) = \frac{E_0}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\Gamma}} \exp\left[\frac{(w-w_0)^2}{4\Gamma_0}\right] \quad (20)$$

On calcule le champ électrique associé à l'ondelette  $\theta(\Omega, z=0)$ .

$$\begin{aligned} \theta(t, z=0) &= TF\{\theta(\Omega, z=0)\} \\ \theta(t, z=0) &= E_0 \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+\Gamma}} \cdot \exp\left[\frac{-(w_0-\Omega)^2}{4(\gamma+\Gamma)}\right] \times \exp\left[-\frac{\gamma\Gamma}{\gamma+\Gamma} t^2\right] \cdot \exp\left[j \frac{\gamma w_0 + \Gamma\Omega}{\gamma+\Gamma} t\right] \end{aligned} \quad (21)$$

Le maximum d'amplitude de l'ondelette  $\theta(t, z=0)$  varie avec  $\Omega$ , fréquence centrale d'analyse sur une gaussienne de paramètre  $\gamma + \Gamma$  [10].

Dans le temps, l'impulsion est aussi gaussienne, de paramètre  $\frac{\gamma\Gamma}{\gamma+\Gamma}$ , en enveloppe.

Le champ électrique au niveau de l'ondelette au point  $z$  du milieu s'écrit :

$$\theta(\Omega, z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\gamma}} \cdot E(w) \cdot \exp\left[-\frac{(w-\Omega)^2}{4\gamma}\right] \cdot \exp[j\varphi(w)] \quad (22)$$

Si on choisit la largeur spectrale de l'ondelette très petite devant la largeur spectrale de l'impulsion, c-a-d :  $\delta w \ll \Delta w$ .

On peut écrire :

$$\varphi(w) = \varphi(\Omega) + (w-\Omega) \frac{d\varphi}{dw}\Big|_{w=\Omega} + \frac{1}{2} (w-\Omega)^2 \frac{d^2\varphi}{dw^2}\Big|_{w=\Omega} + \dots + \frac{1}{n!} (w-\Omega)^n \frac{d^n\varphi}{dw^n}\Big|_{w=\Omega} + \theta(w)$$

$$\begin{aligned} \theta(\Omega, z) &= \frac{E_0}{2\sqrt{\pi\gamma}} \sqrt{\frac{\pi}{\Gamma}} \cdot \exp\left[-\frac{(w-w_0)^2}{4\Gamma}\right] \cdot \exp\left[-\frac{(w-\Omega)^2}{4\gamma}\right] \cdot \\ &\exp\left[j\varphi^{(0)} + j(w-\Omega) \cdot \varphi^{(1)} + \frac{1}{2} j(w-\Omega)^2 \cdot \varphi^{(2)}\right] \end{aligned} \quad (23)$$

Calculons l'intensité temporelle  $\theta(t, z)$  associé à l'ondelette tel que

$$\theta(t, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(\Omega, z) \cdot \exp(j\omega t) d\omega \quad (24)$$

$$\theta(t,z) = \frac{1}{2\pi} \frac{E_0}{2\sqrt{\pi\gamma}} \sqrt{\frac{\pi}{\Gamma}} e^{\left[-\frac{(\Omega-w_0)^2}{4\Gamma}\right]} \cdot e^{(j\varphi^{(0)})} \cdot e^{\left[-\frac{1}{4\Gamma} + \frac{1}{4\gamma} - \frac{1}{2}j\varphi^{(2)}\right]\Omega^2} \cdot e^{\left[\frac{(\Omega-w_0)}{2\Gamma} - j\varphi^{(1)}\right]\Omega} \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[-\frac{1}{4\Gamma} + \frac{1}{4\gamma} - \frac{1}{2}j\varphi^{(2)}\right]w^2} e^{\left[\frac{1}{4\Gamma} + \frac{1}{4\gamma} - \frac{1}{2}j\varphi^{(2)}\right]2\Omega w} \cdot e^{\left[-\frac{(\Omega-w_0)}{2\Gamma} - j\varphi^{(1)}\right]w} e^{j\omega t} dw \tag{25}$$

soit :

$$\theta(t,z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\gamma}} \sqrt{\frac{\Gamma(z)}{\Gamma}} \cdot \exp(j\varphi^{(0)}) \cdot \exp\left(-\Gamma(z) \left[t + \frac{z}{V_g(\Omega)}\right]^2\right) \cdot \exp\left(-\frac{(\Omega-w_0)^2}{4\Gamma} \left[1 - \frac{\Gamma(z)}{\Gamma}\right]\right) \cdot \exp\left[j\left(1 - \frac{\Gamma(z)}{\Gamma}\right)\Omega + \frac{\Gamma(z)}{\Gamma} \cdot w_0\right] \left[t + \frac{z}{V_g(\Omega)}\right] \tag{26}$$

Le retard de groupe de l'ondelette  $\left[t + \frac{z}{V_g(\Omega)}\right]$  est caractérisé par une enveloppe gaussienne qui est la largeur temporelle.

Le retard de groupe de l'ondelette est inversement proportionnel à la vitesse de groupe son enveloppe propage sans déformation [5].

#### 4. Résultats

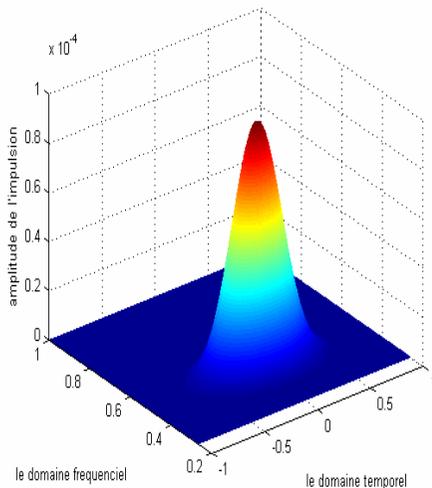


Figure 7a :

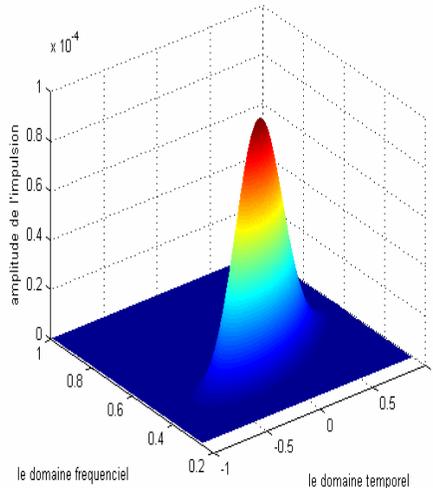


Figure 8a

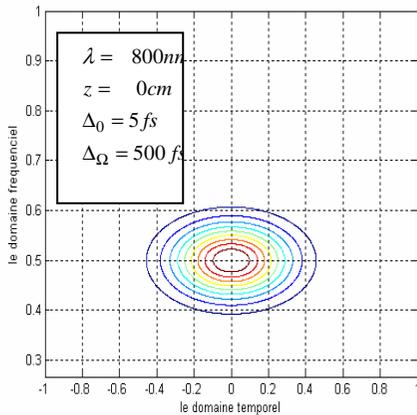


Figure 7b :

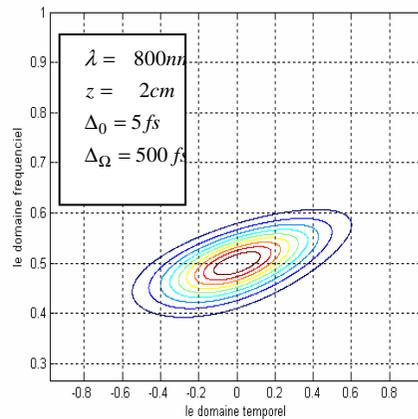


Figure 8.b :

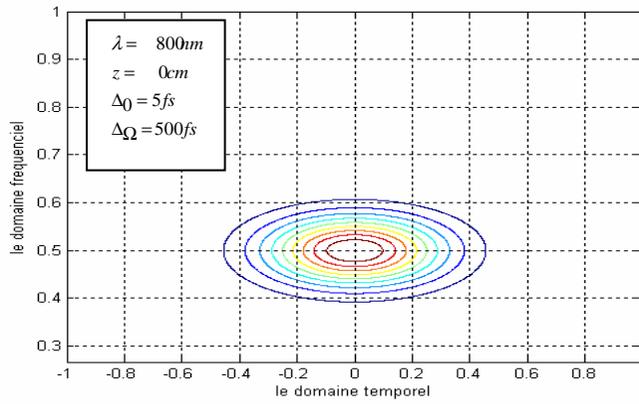
## 6. Discussion

A travers cette analyse par ondelette on peut conclure que :

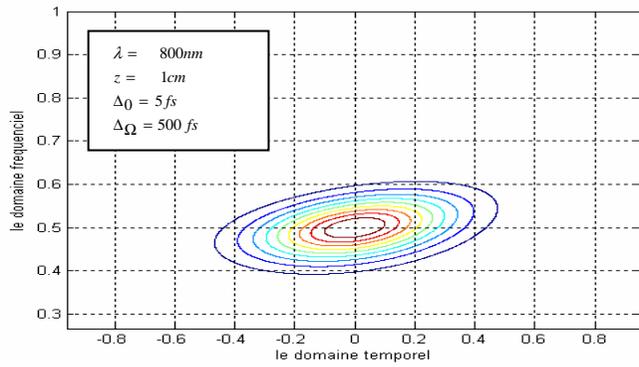
Pour pouvoir faire une bonne analyse sur les impulsions lasers ultra-brèves et se limité seulement à l'ordre deux de la série de Taylor de la phase  $\varphi(w)$ . il faut prendre des valeurs plus au moins grande de la durée temporelle de l'ondelette de l'ordre de 200 fs ou de 500 fs voir les 1000 fs.

Les avantages de l'analyse par ondelette par rapport à l'analyse par onde plane sont les suivantes :

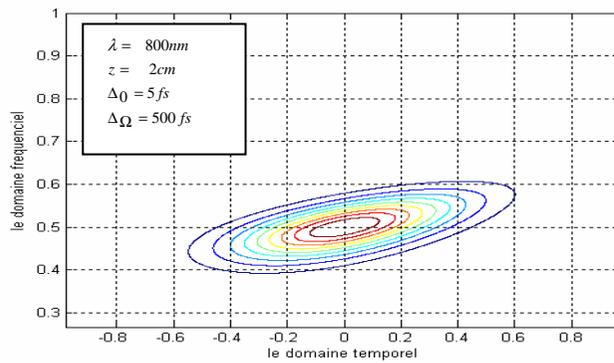
- On peut se limité à l'ordre deux de la série de Taylor de la phase  $\varphi(w)$ . par contre pour l'analyse par onde plane il faut ajouter les ordres supérieurs.
- Elle nous permet de renseigner sur la variation de la fréquence instantanée  $w(t)$ , c'est-à-dire sur la modulation du champ électrique, ces choses qu'on ne peut pas le voir dans le cas des ondes planes.
- Si on prend une ondelette de forme gaussienne la sortie reste aussi gaussienne, par contre, dans l'analyse par ondes plane on remarque l'apparition des lobes secondaires (sous forme d'ondulations de l'impulsion). Ce qui explique l'insuffisance de cette méthode pour l'étude de impulsions lasers ultra-brèves.
- L'analyse par onde plane ne permet pas une compréhension physique directe de la propagation de l'enveloppe et principalement ne rend pas à l'évidence de fait que c'est la dispersion de la vitesse de groupe qui génère la distorsion des impulsions ultra brèves.



**Figure 9a :**



**Figure 9b :**



**Figure 9c :**

Les **Figures 9.a, b et c** montrent que lors de la propagation des impulsions ultra-brèves de l'ordre de moins de 10 fs à travers un milieu d'indice  $n(\omega)$  subit une variation dans le domaine temporelle. Par contre, dans le domaine fréquentiel l'impulsion reste inchangée.

## 5. Conclusion

Nous avons présenté dans cette publication une nouvelle méthode pour la modélisation et la caractérisation de la propagation d'impulsions lasers ultra-brèves à travers un milieu linéaire dispersif.

Dans le domaine de télécommunications par fibre optique, le phénomène d'élargissement temporel des impulsions lasers est décrit seulement par la deuxième dérivée de la phase  $\varphi(\omega)$ . Nous avons bien montré que cela reste valable uniquement pour des durées qui sont supérieures à  $\approx 60$  fs. Par la suite nous avons ajouté d'autres ordres supérieurs de la phase est voir qu'est ce qu'elles représentent ces dérivées d'ordres supérieures.

Par la suite, nous avons, mis en œuvre et validé un modèle numérique qui est basé sur la transformée de *Gabor* afin de pouvoir faire une décomposition possible d'une impulsion ultra-brève de quelques femtoseconde en un nombre très grande d'ondelettes de transformée de *Fourier* limitée laquelle se propage à travers un milieu dispersif.

Après la propagation, l'impulsion être visualisé dans une représentation à trois dimensions cette représentation permet de voir l'évolution de l'agrandissement subi par l'impulsion.

Cette analyse qui est basée sur la transformée de *Gabor* reste un outil très puissant et en plein évolution. Elle nous a permis de faire une étude très approfondie au niveau des impulsions femtoseconde. Elle permet aussi de faire une représentation temps-fréquence pour bien satisfaire le phénomène d'incertitude temps-fréquence.

Ce model est simple à le programmer, le temps de calcul est assez court si l'on compare avec d'autres méthode comme la méthode FDTD (Finite Difference Time Domain) qui exige un temps de calcul assez long.

## Références

- [1] - P. H. Pioger « Solitons optiques spatiaux en milieu quadratique : expériences en régime d'impulsions courtes à  $1,5\mu\text{m}$  et applications au traitement ultrarapide de données optiques » Thèse N : 38-2004 Université de Limoges (2004)
- [2] - B. Kibler « Propagation non-linéaire d'impulsions ultracourtes dans les fibres optiques de nouvelle génération » Thèse de Doctorat à Université de Franche-Comté (2007).
- [3] - P. Tchofo Dinda, A. B. Moubissi and K. Nakkeeram , *Phys, A*, 34, L103-L110 (2001)
- [4] - P.Kuzel « Electromagnétisme dans le milieu continues » Université Paris Nord (2001).
- [5] - M. Khelladil, O. Sedikki, F. T. Bendimerad « Time-Frequency Decomposition of an Ultrashort pulse:Wavelet Decomposition » *RadioEngineering journal* ISSN 1210-2512 N°1, Vol. 17 (2008).
- [6] - G. P. Agrawal « Nolinear Fiber Optics » Third Edition University of Rochester (2001).
- [7] - O. Sedikki, C. Hirlimann, M. Chick Beld, and A.Belaid « Optique linéaire des impulsions Femtoseconde dans un milieu dispersif » (2001).
- [8] - M. Debbal, F. B ereksi-Reguig « Choix de l'ondelette analysante et classification des signaux phonocardiogram m es en fonction des souffles surajoutés » *Afrique SCIENCE 01(1)*, ISSN 1813-548X (2005) 1-13.
- [9] - Marie May, J. F. Morhange and C. Hirlimann, *Opt lett*, Vol 18 N°5 (1993).
- [10] - Yves Meyer, « Les ondelettes : Algorithmes et Applications » Edition Armand Colin, (1994).
- [11] - C. Hirlimann, Marie May, J. F. Morhang « Analyse en Ondelettes d'Impulsions Ultra Courtes » Laboratoires de Physiques des Solides Université Pierre et Marie Curie (1993).