

## **Un modèle à évènements pour étudier la flexibilité opérationnelle d'un flow shop flexible**

**Kouassi Hilaire EDI<sup>1\*</sup> et Philippe DUQUENNE<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Laboratoire de Mathématique et Informatique, UFR-SFA, Université Nangui Abrogoua,  
02 BP 801 Abidjan, Côte d'Ivoire*

<sup>2</sup>*Laboratoire de Génie Chimique/PSI/Génie Industriel, CAMPUS INPT/ ENSIACET, 4 allée Emile Monso,  
CS 84234, 31 432 Toulouse cedex 4, France*

---

\*Correspondance, courriel : [edi.hilaire@yahoo.fr](mailto:edi.hilaire@yahoo.fr)

### **Resumé**

La gestion des ateliers de production recherche le meilleur compromis entre les impératifs commerciaux, financiers et industriels. L'objectif de cet article est la caractérisation et la modélisation des leviers de flexibilité d'un atelier de production à cheminement unique (« flow shop »), afin d'assurer la flexibilité opérationnelle du système. Cette flexibilité porte sur le fait que chaque poste de la chaîne de production dispose d'une ou plusieurs machines identiques, sur des durées opératoires variables à chaque poste selon le nombre des opérateurs affectés, et sur les dates de livraison des produits. La convergence entre les ressources requises pour l'exécution d'un plan de production et celles mises en œuvre pour sa réalisation est favorisée. La fonction objectif intègre l'évaluation des stocks et en-cours, le coût du travail et de l'inactivité, et les conséquences des perturbations. Le problème est résolu en traitant l'ensemble des variables simultanément, selon une formulation de programmation mathématique non-linéaire en variables mixtes (MINLP).

**Mots-clés :** *ordonnancement, flexibilité opérationnelle, MINLP, convergence.*

### **Abstract**

#### **An event-based model to study the operational flexibility of a flexible flow shop**

The management of production facilities is searching for the best compromise between the commercial, financial and industrial requirements. The objective of this paper is the characterization and modeling of the flexibility levers in a flow shop, to ensure the operational flexibility of the system. This flexibility relates to the fact that each workstation in the production line offers one or more identical positions, to varying processing times at each station according to the number of operators affected, and to delivery dates of products. The convergence between the resources required to execute a production plan and those used for its realization is promoted. The objective function includes the assessment of stocks and work in progress, labor and inactivity costs, and consequences of disturbances. The problem is solved by treating all variables simultaneously, according to a formulation of mixed integer non-linear mathematical programming (MINLP).

**Keywords :** *scheduling, operational flexibility, MINLP, convergence.*

## 1. Introduction

En vue de relever le défi de la performance et de la compétitivité dans un environnement économique en perpétuel changement, les entreprises sont de plus en plus amenées à s'adapter, et accroître leur réactivité vis-à-vis du marché afin d'assurer leur pérennité. Un aspect de cette réactivité concerne la convergence entre la charge de travail et la capacité en ressources humaines d'une entreprise à répondre à une demande d'un plan de production. Cette capacité de s'adapter, reconnue sous le nom de flexibilité [1,2], est la traduction d'un ensemble de décisions de gestion prises aux niveaux stratégique, tactique et opérationnel. Ces décisions permettent d'obtenir une organisation efficace du système de production, d'assurer le respect des méthodes de fabrication et des contraintes sur l'utilisation des ressources. Elle portent également sur les moyens de production ; les moyens de gestion de la production ; les moyens d'achats et ventes ; du système d'information et de conception du produit. De ce point de vu, les chercheurs ont développé et proposé des travaux d'ordonnancement en vue de maximiser la production tout en minimisant les coûts de production. En plus des coûts liés à l'utilisation des moyennes de production (salaires, énergies et coûts d'organisation), les coûts de stockages et les pénalités de retards prennent parfois des proportions démesurées. La recherche d'un ordonnancement capable d'obtenir un niveau de stock zéro ou minimum et la production de biens dans un délai acceptable s'avèrent décisive pour réduire le coût de production et augmenter le gain de l'entreprise. Après une présentation de l'état des travaux d'ordonnancement d'un flowshop, nous exposerons notre modèle et enfin nous présenterons une résolution à parir d'une methode exacte : procedure par séparation et évaluation (« Branch and bound »).

## 2. Méthodologie

### 2-1. Situation du problème : ordonnancement d'un flow shop

L'ordonnancement est un processus très important utilisé dans la gestion et la production des biens et services. Il consiste en une allocation des ressources dans le but d'exécuter un ensemble de travaux sur une période de temps donnée. Depuis les travaux de Salveson [3] et de Johnson [4], un grand nombre d'études ont été publiées sur l'ordonnancement. Dans un problème d'ordonnancement de flowshop simple, chaque poste de travail est constitué d'une seule machine [5,6]. Si un poste au moins comporte plus d'une machine, on parle alors de flowshop flexible ou flowshop hybride [7-9]. Ainsi, un flowshop flexible n'est qu'une généralisation du concept de flowshop simple [10]. Un flowshop flexible est une configuration d'ateliers à cheminement unique dans lequel les travaux sont exécutés de façon linéaire à travers des postes de travail constitués de machines en parallèle [11]. Des travaux effectués dans [12] ont permis d'élaborer une classification standard des problèmes de flowshop (notation standard  $\alpha | \beta | \gamma$ ). Cette classification a été étendue par Vignier [13] dans le but de prendre en compte, les nouvelles architectures d'organisation des machines dans les ateliers (machines parallèles . . .). En réalité, les unités de production utilisent rarement une seule machine à chaque poste pour exécuter une opération. La chaîne de production est constituée d'une série de postes de travail constituée de machines identiques en parallèle. Cette duplication des machines à chaque postea pour but d'accroître la flexibilité et l'efficacité de la chaîne de production. De plus, lorsque la durée opératoire d'un travail donné est la même sur toutes les machine (resp. tous les postes de travail), on parle alors de flowshop proportionnel (resp. de flowshop flexible proportionnel). Des travaux portent sur une configuration de flowshop flexible dans laquelle, l'exécution d'une opération est précédée (resp. suivie) d'un temps de montage (resp. démontage) dépendant de la séquence des travaux sur la machine. Ce temps mobilise uniquement la ressource [14]. Il existe également des études qui portent sur l'ordonnancement avec des contraintes de blocage [15].

Le concept de blocage vient du fait que dans les lignes flexibles de production, les postes de travail sont reliés par un convoyeur. Ainsi, un poste de travail ne peut-il libérer un produit que si le convoyeur d'accumulation aval a une position libre. A l'inverse, un poste de travail en aval peut être en attente par manque de produit provenant du poste amont. Dans ce travail, nous supposons une variation de la durée opératoire sur chaque poste. Cette variation est obtenue grâce à des modifications du nombre des opérateurs (ressources humaines disponibles).

## **2-2. Complexité**

L'ordonnancement de travaux sur une chaîne de production de type flow shop flexible est considéré comme NP-difficile [16]. Même pour le cas de flow shop simple avec une seule machine à chaque poste de travail (2, 3 postes de travail ou davantage). Le problème est toujours considéré comme NP-difficile au sens fort du terme comme le montre Garey [17]. De plus, selon Gupta, tout flowshop de deux postes de travail disposant plus d'une machine à un poste est NP-difficile au sens fort du terme [18].

## **2-3. Méthodes de résolution**

Plusieurs méthodes de résolution ont été élaborées pour aborder les différents problèmes de flowshop flexible. On distingue les méthodes exactes, les heuristiques et les méta-heuristiques. Parmi les méthodes exactes, la méthode de séparation et évaluation est la plus utilisée. Brah et Hunsucker [19] ont-ils présenté un algorithme basé sur la méthode de séparation et évaluation dans une configuration de flowshop hybride avec un nombre arbitraire de poste de travail et la prise en compte de stocks intermédiaires. Portmann et al. [20] ont proposé une version améliorée de l'algorithme de séparation et évaluation de Brah et Hunsucker. Dans leur travail, ils ont amélioré leur borne inférieure et ont réduit le nombre de branches utilisées dans l'arbre de recherche. Moursli et Pochet [21] ont également présenté un algorithme de séparation et évaluation pour la résolution d'un problème de flowshop hybride dans lequel chaque poste de travail est constitué de plusieurs machines identiques en parallèle. En outre, Sawik quant à lui présente une formulation par programmation en nombre entier pour la résolution d'un problème d'ordonnancement d'une ligne de production flexible avec une capacité de stockage limitée [22].

Bien que les méthodes dites exactes fournissent des solutions optimales, elles se sont avérées de moins en moins efficaces pour la résolution des problèmes de grandes tailles et nécessitant un temps de calcul dépassant l'attente des responsables de la planification. Cette situation a conduit certains chercheurs à élaborer des méthodes dites approchées. Il existe deux types de méthode approchée dont les heuristiques et les méta-heuristiques. Les chercheurs [23,24] ont proposé une méthode tabou pour aborder le même problème. Une étude réaliste a été effectuée par Low [25] sur le modèle du flowshop flexible. Dans cette étude, il utilise le recuit simulé pour l'optimisation du temps d'écoulement total dans le système. Houari et Mhalla ont étudié un problème de flowshop hybride à deux postes de travail dans lequel ils utilisent une procédure de recherche tabou et une procédure de recuit simulé pour sa résolution [26]. Ishibuchi et Misaki [27] se sont intéressés à la méthode de recuit simulé pour résoudre ces problèmes. D'autres auteurs se sont focalisés sur les algorithmes génétiques [28,29] pour optimiser la durée d'exécution des travaux sur les postes de travail. Dans la plupart des études menées, la durée de traitement d'un article sur chaque poste de travail ou machine (durée opératoire ou cycle) est fixe et connue. Aussi, elles ne font pas allusion de l'utilisation des effectifs des ressources humaines comme un aspect de la flexibilité d'un flowshop. De plus, nous considérons que la date de livraison d'un article est une variable qui est définie dans un intervalle prédéterminé.

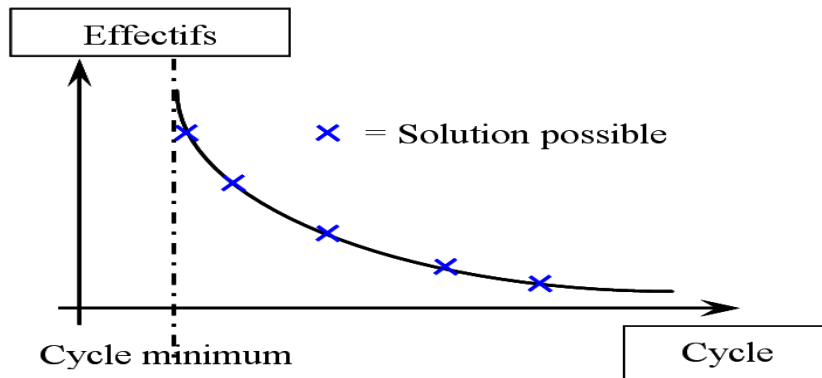
## 2-4. Modélisation du problème

### 2-4-1. les variables et les données

<p><u>Les indices</u></p>	<p><math>i</math>: indice pour l'article et <math>m</math> le nombre total d'articles sur la période, <math>1 \leq i \leq m</math>  <math>j</math>: indice pour le poste et <math>n</math> le nombre total de postes, <math>1 \leq j \leq n</math>  <math>k, o</math>: indices pour les événements et <math>T</math> le nombre total d'événements, <math>1 \leq k \leq T</math> et <math>1 \leq o \leq T</math> avec <math>m + n \leq T \leq 2.m.n</math></p>
<p><u>Les variables continues</u></p>	<p><math>t_k</math>: date d'occurrence de l'événement <math>k</math>,  <math>L_i^0</math>: date de livraison théorique de l'article <math>i</math></p>
<p><u>Les variables discrètes</u></p>	<p><math>N_{i,k}</math>: nombre de positions disponibles sur le poste <math>j</math> entre les événements <math>k</math> et <math>k+1</math>,  <math>as_{i,j,k}</math>: variable binaire désignant l'affectation du début d'opération à l'événement <math>k</math> (<math>as_{i,j,k} = 1</math> si l'article <math>i</math> arrive sur le poste <math>j</math> à la date de l'événement <math>k</math> et <math>= 0</math> sinon),  <math>ae_{i,j,k}</math>: variable binaire désignant l'affectation de fin d'opération à l'événement <math>k</math> (<math>ae_{i,j,k} = 1</math> si l'article <math>i</math> quitte le poste <math>j</math> à la date de l'événement <math>k</math> et <math>= 0</math> sinon),  <math>\odot_{i,j}</math>: variable binaire matérialisant un changement de durée opératoire sur le poste <math>j</math> entre les articles <math>i</math> et <math>i+1</math>,  <math>E_k</math>: effectif présent dans l'atelier entre les événements <math>k</math> et <math>k+1</math>,  <math>E^{\text{tot}}</math>: effectif maximum présent dans l'atelier sur l'horizon de temps <math>E^{\text{tot}} = \max(E_k)</math>,  <math>E_{i,j}</math>: effectif présent sur le poste <math>j</math> pour l'article <math>i</math>,  <math>y_k</math>: variable d'écart pour un événement <math>k</math> possible et non affecté,  <math>c_{i,j}</math>: cycle de l'article <math>i</math> sur le poste <math>j</math>,  <math>\delta_{i,j}</math>: date de disponibilité des éléments de l'article <math>i</math> pour le poste <math>j</math>.</p>
<p><u>Les données :</u></p>	<p><math>c_j^{\min}</math>: valeur minimale du cycle pour le poste <math>j</math>,  <math>c_j^{\max}</math>: valeur maximale du cycle pour le poste <math>j</math>,  <math>\gamma</math>: nombre d'articles sur lesquels se répercutent les perturbations,  <math>N_j^{\min}</math>: nombre minimal de positions disponibles sur le poste <math>j</math> (en principe égal à 0),  <math>N_j^{\max}</math>: nombre maximal de positions disponibles sur le poste <math>j</math>,  <math>N_j^0</math>: nombre de positions initialement disponibles sur le poste <math>j</math> (par défaut, <math>N_j^0 = N_j^{\max}</math>),  <math>L_i^-</math>: date de livraison au plus tôt pour l'article <math>i</math> (par défaut, <math>L_i^- = L_i^0 - 2</math>),  <math>L_i^+</math>: date de livraison au plus tard pour l'article <math>i</math> (par défaut, <math>L_i^+ = L_i^0 + 2</math>),  <math>\chi_j</math>: charge de travail sur le poste <math>j</math>,  <math>v_{i,j}</math>: valeur de l'article <math>i</math> à l'entrée du poste <math>j</math> (en coût matière uniquement),  <math>w_{i,j}</math>: valeur de la matière ajoutée à l'article <math>i</math> sur le poste <math>j</math>. il établit la relation suivante, pour assurer la cohérence des données, entre <math>v_{i,j}</math> et <math>w_{i,j}</math>:  <math>\forall i \leq n-1, \forall j \quad v_{i+1,j} = v_{i,j} + w_{i,j}</math></p>

**2-4-2. Positionnement du problème**

La possibilité de faire varier les durées apporte une grande flexibilité tant au niveau du processus de production que des solutions envisagées. En effet, il existe une relation liant la durée opératoire et l'effectif des opérateurs affectés à un poste de travail **Figure 1** ci-dessous. Cette relation traduit la possibilité de faire varier la durée opératoire (ou cycle) dans un intervalle prédéfini en fixant le nombre d'opérateur parmi une gamme de choix. Cela est mis en évidence par la



**Figure 1 : Effectifs et durée opératoire admissible**

Nous considérons que la durée  $C_{ij}$  de passage d'un article  $i$  sur un poste  $j$  est limité par une valeur minimale traduisant des contraintes liées à la capacité d'accueil du poste considéré  $C_i^{\min}$  et d'une valeur maximale admissible (pour des raisons d'efficacité)  $C_i^{\max}$  :  $C_i^{\min} \leq C_{ij} \leq C_i^{\max}$ . En notant  $X_i$  la charge de travail sur le poste  $j$  (constant par hypothèse) et  $E_{ij}$  l'effectif nécessaire au traitement de l'article  $i$  sur le poste  $j$ , la relation entre la durée opératoire et l'effectif lors de la fabrication d'un produit s'établit comme suite :  $E_{ij} = \frac{X_j}{C_{ij}}$ . En ce qui concerne le présent travail, il s'attèlera à expliquer les différents paliers de flexibilité tant en termes d'organisation de l'atelier qu'au niveau des leviers de flexibilité suivant : les dates de livraisons ; les stocks amont ; les stocks intermédiaires ; les stocks finaux ; la durée de travail effective intervenant dans le calcul du coût du travail et les temps d'attente entraînant un coût d'inactivité.

**2-4-3. Description et hypothèses de la modélisation**

Nous considérons le cas d'un atelier de fabrication, constitué de  $n$  postes et devant produire  $m$  articles, répondant aux hypothèses suivantes : le volume de la demande est connu *a priori*, et la date de livraison  $L_i$  pour chaque article  $i$  doit appartenir à un intervalle  $[L_i^-, L_i^+]$  déterminé ; tous les articles suivent la même gamme opératoire, et passent sur l'ensemble des postes, le nombre total d'opérations est donc connu ; les durées opératoires sur chaque poste  $j$  et pour chaque article  $i$ , notées  $c_{ij}$  sont variables ; pour chaque poste  $j$  et chaque article  $i$ , il existe un ensemble de données parmi lesquelles  $c_{ij}$  doit prendre valeur ; chaque poste  $j$  est caractérisé par son nombre de positions  $N_j^{\max}$ , correspondant au nombre d'articles pouvant être traités en même temps à un instant donné, et indépendamment les uns des autres ; chaque article doit passer une fois et une seule sur chaque poste, en occupant une seule position ; aucun stock intermédiaire n'est possible entre deux postes consécutifs dans l'atelier (politique de flux tendu).

#### 2-4-4. Les contraintes du problème

Dans ce paragraphe nous exprimons les contraintes du système de production par un ensemble d'équations comme présentées ci-dessous. Chaque événement  $k$  (fin ou début d'opération pour un article  $i$  sur un poste  $j$ ) doit se produire une et une seule fois sur l'ensemble de l'horizon.

$$\forall i, j \sum_{k=1}^T as_{i,j,k} = 1 \quad \text{et} \quad \forall i, j \sum_{k=1}^T ae_{i,j,k} = 1 \quad (1)$$

Relation de précédence pour un article  $i$  entre deux postes ( $j$  et  $j+1$ ) de la gamme : Pour qu'une opération  $j$  débute au  $k^{\text{ème}}$  événement, l'événement déclenchant la fin de l'opération  $j-1$  doit être affectée à un événement antérieur (donc compris entre 1 et  $k$ ).

$$\forall i, \forall j > 1, \forall k > 1 \quad as_{i,j,k} \leq \sum_{o=1}^{k-1} ae_{i,j-1,o} \quad (2)$$

Cohérence des événements de début et de fin de chaque opération : pour qu'une opération se termine au  $k^{\text{ème}}$  événement, elle doit avoir débuté par une affectation à un événement antérieur (de 1 à  $k-1$ ).

$$\forall i, \forall j > 1, \forall k > 1 \quad ae_{i,j,k} \leq \sum_{o=1}^{k-1} as_{i,j,o} \quad (3)$$

Respect de la date de livraison échuë : la mise à disposition de l'article peut avoir lieu dès la fin de la dernière opération, cette date étant définie par le membre de gauche de l'inégalité ci-dessus.

$$\forall i \sum_{k=1}^T ae_{i,n,k} . t_k \leq L_i \quad \text{et} \quad \forall i \quad L_i^- \leq L_i \leq L_i^+ \quad (4)$$

Affectation cohérente des postes : le poste dont le nombre de positions occupées initialement est connu, fait l'objet d'un bilan des actions qui débutent et qui s'achèvent lors de l'occurrence de chaque événement. La variable désignant le nombre de positions disponibles est contrainte par le nombre maximum de positions utilisables.

$$\forall j, \forall k > 1 \quad N_{j,k} = N_{j,k-1} - \sum_{i=1}^m as_{i,j,k} + \sum_{i=1}^m ae_{i,j,k} \quad \text{avec} \quad N_j^{\min} \leq N_{j,k} \leq N_j^{\max} \quad (5)$$

Définition de la durée opératoire et des dates de réalisation : la durée de chaque opération est calculée comme la différence entre les dates de fin et de début d'opération, exprimée en fonction des dates des événements et des variables binaires d'affectation. Chaque durée est contrainte entre deux bornes. De plus, les événements sont classés par ordre chronologique

$$\forall i, \forall j \sum_{k=1}^T ae_{i,j,k} . t_k - \sum_{k=1}^T as_{i,j,k} . t_k = c_{i,j} \quad \text{avec} \quad c_j^{\min} \leq c_{i,j} \leq c_j^{\max} \quad (6)$$

et  $\forall k \geq 1 \quad t_{k-1} \leq t_k$

Relation entre l'effectif et le cycle sur chaque poste et pour chaque article : l'effectif requis pour exécuter une opération sur le poste est égale au rapport de la charge de travail par le cycle.

$$\forall i, \forall j \ E_{i,j} \cdot c_{i,j} - \chi_j = 0 \tag{7}$$

Détermination de l'effectif dans l'atelier : l'effectif total de l'atelier à chaque état (entre deux événements consécutifs) est calculé comme la somme des effectifs sur les postes entre les événements qui délimitent l'état. La variable  $E^{tot}$  interviendra dans la fonction coût, afin de chiffrer le coût total du travail.

$$E_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \ E_k = E_{k-1} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n as_{i,j,k} \cdot E_{i,j} - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n ae_{i,j,k} \cdot E_{i,j} \tag{8}$$

$$\forall k \ 0 \leq E_k \leq E^{tot}$$

Assignation effective des événements possibles et classement par ordre chronologique : la variable d'écart  $y_k$  est forcée à prendre la valeur 1 si aucune action n'est observée lors de l'événement  $k$ ; les variables d'écart sont classées par valeurs décroissantes afin de regrouper tous les événements non affectés (pour lesquels la variable d'écart est égale à 1) en début de liste. Si un événement est associé à une action, la variable d'écart prend une valeur nulle.

$$\forall k \ 0 \leq y_k \leq 1 \quad \text{et} \quad \forall k \ \begin{cases} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n as_{i,j,k} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n ae_{i,j,k} + y_k \geq 1 \\ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n as_{i,j,k} + y_k \leq 1 \\ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n ae_{i,j,k} + y_k \leq 1 \end{cases} \quad \text{aussi} \quad \forall k > 1 \ y_{k-1} \leq y_k \tag{9}$$

Ecart minimal entre deux événements affectés : afin d'éviter que deux événements distincts ne soient associés à deux dates égales, nous définissons un écart minimal  $\varepsilon$  entre deux dates consécutives (la valeur de  $\varepsilon$  doit être petite par rapport aux cycles de production, nous avons retenu une valeur de 0,5 unités de temps). Si les événements ne sont pas affectés, ils peuvent être associés à des dates égales.

$$\forall k > 1 \ t_k + \varepsilon \cdot (1 - y_k) \leq t_{k+1} \tag{10}$$

Respect des dates de disponibilité : une opération ne peut commencer que lorsque les éléments matériels nécessaires (fournitures, approvisionnements) à sa réalisation sont disponibles sur le site de l'atelier. De plus, l'hypothèse d'une alimentation à débit constant permet de calculer l'ensemble des dates d'alimentation pour tous les articles et pour tous les postes à partir de la première date ( $\delta_{1,1}$ ), en utilisant la durée entre deux approvisionnements dans l'atelier, noté  $\alpha$ , et la durée entre l'approvisionnement de deux postes consécutifs, noté  $\beta$ . La date  $\delta_{1,1}$  intervient dans le terme de la fonction objectif ; elle prendra donc la valeur maximale permettant de respecter la contrainte, afin de minimiser le coût total.

$$\forall i, \forall j \ \sum_{k=1}^T as_{i,j,k} \cdot t_k \geq \delta_{i,j} \quad \text{avec} \quad \delta_{i,j} = \delta_{1,1} + \alpha \cdot (i-1) + \beta \cdot (j-1) \tag{11}$$

### 2-4-5. La fonction objectif à minimiser

La fonction objectif à optimiser est la somme de plusieurs critères, exprimés en unités monétaires ; à savoir :

- $F_1$  : coûts liés au stockage amont,
- $F_2$  : coûts liés aux en-cours et stocks intermédiaires,
- $F_3$  : coûts liés au stockage de produits finis,
- $F_4$  : pénalités de retard,
- $F_5$  : coût du travail effectif,
- $F_6$  : coût de l'inactivité,
- $F_7$  : coût des perturbations.

Notre objectif, est l'obtention d'une solution optimale, non contrainte par des limites sociales, et de mesurer l'intensité des perturbations. En désignant par  $\tau$  le taux d'actualisation par unité de temps, les coûts imputés à l'immobilisation d'un capital  $V$  durant une période  $d$  sont de la forme :  $V \cdot [(1 + \tau)^d - 1]$ . Lorsque cette durée  $d$  est courte, nous pouvons nous livrer à l'approximation suivante :  $V \cdot [(1 + \tau)^d - 1] \approx V \cdot \tau \cdot d$  et Lorsque  $\tau$  est petit, l'approximation  $\tau = \tau'$  est acceptable.

#### 2-4-5-1. Les stocks de matière avant chaque poste (F1)

Les coûts liés à l'immobilisation de la matière première et des articles stockés avant leur entrée dans l'atelier sont calculés en fonction de la valeur de chacun des éléments, sur la durée comprise entre leur date de disponibilité et leur date d'entrée sur le poste correspondant.

$$F_1 = \tau \cdot \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n w_{i,j} \cdot (d_{i,j} - \delta_{i,j}) + v_{i,0} \cdot (d_{i,1} - \delta_{i,1}) \right)$$

$$= \tau \cdot \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n w_{i,j} \cdot \left( \sum_{k=1}^T as_{i,j,k} \cdot t_k - (\delta_{1,1} + \alpha \cdot (i-1) + \beta \cdot (j-1)) \right) + v_{i,0} \cdot \left( \sum_{k=1}^T as_{i,1,k} \cdot t_k - (\delta_{1,1} + \alpha \cdot (i-1)) \right) \right)$$

avec  $d_{i,j}$  : date de début de l'opération  $j$  pour l'article  $i$ , (12)  
 $v_{i,0}$  : valeur de l'article  $i$  avant le début de l'opération 1.

#### 2-4-5-2. Les articles en cours de production et les stocks intermédiaires (F2)

Les encours sont calculés, article par article, entre la date d'entrée de l'article dans l'atelier ( $d_{1,1}$ ) et la date de mise à disposition de celui-ci ( $f_{i,n}$ ), en prenant en compte l'évolution de sa valeur. Soit  $f_{i,j}$ , la date de fin de l'opération  $j$  pour le poste  $i$ , on a :



$$\begin{aligned}
 F_2 &= \tau \cdot \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (f_{i,j} - d_{i,j}) \cdot v_{i,j} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n-1} (d_{i,j+1} - f_{i,j}) \cdot v_{i,j} \right) \\
 &= \tau \cdot \left( \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^{n-1} (d_{i,j+1} - d_{i,j}) \cdot v_{i,j} + (f_{i,n} - d_{i,n}) \cdot v_{i,n} \right) \right) \\
 &= \tau \cdot \left( \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^{n-1} v_{i,j} \sum_{k=1}^T (as_{i,j+1,k} - as_{i,j,k}) \cdot t_k + v_{i,n} \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^T (ae_{i,n,k} - as_{i,n,k}) \cdot t_k \right) \right)
 \end{aligned} \tag{13}$$

**2-4-5-3. Stockage des produits finis avant la livraison (F3)**

Le stockage des produits finis s'étale sur la période comprise entre la date de mise à disposition de l'article et sa date de livraison ( $L_i$ ), au cours de laquelle la valeur n'évolue plus, et le risque d'obsolescence sera considéré comme négligeable.

$$F_3 = \tau \cdot \sum_{i=1}^m (L_i - f_{i,n}) \cdot v_{i,n} = \tau \cdot \sum_{i=1}^m \left( L_i - \sum_{k=1}^T ae_{i,n,k} \cdot t_k \right) \cdot v_{i,n} \tag{14}$$

**2-4-5-4. Pénalités de retard (F4)**

La fonction  $P_i(t)$  est la loi de pénalité applicable pour un retard de livraison de l'article  $i$ ; elle peut varier selon le client. Elle est a priori croissante au sens strict.

$$F_4 = \int_0^{f_i - L_i} P_i(t) dt \tag{15}$$

**2-4-5-5. Coût du travail (F5) et de l'inactivité (F6)**

Les composantes permettant de chiffrer le coût du travail réellement effectué  $F_5$  et l'inactivité  $F_6$ , et peuvent être évaluées ensemble ou indépendamment l'une de l'autre. En effet, la somme de ces deux termes correspond à la rémunération du nombre maximum d'opérateurs entre le début et la fin du plan de production ; on peut ainsi écrire, en notant  $U$  le coût du travail par unité de temps :

$$F_5 + F_6 = (f_{m,n} - d_{1,1}) \cdot E^{tot} \cdot U = E^{tot} \cdot U \cdot \sum_{k=1}^T t_k \cdot (ae_{m,n,k} - as_{1,1,k}) \tag{16}$$

Si l'on souhaite dissocier activité et inactivité, par exemple en leur associant des coûts différents, notés respectivement  $U$  et  $S$  (si l'on considère que l'inactivité n'est pas totalement perdue mais peut être utilisée à d'autres activités, telles que formation, action d'amélioration, etc.), on obtient alors :

$$F_5 = U \cdot \sum_{k=1}^{T-1} E_k \cdot (t_{k+1} - t_k) \tag{17}$$

$$F_6 = S \cdot \sum_{k=1}^{T-1} (E^{tot} - E_k) \cdot (t_{k+1} - t_k) \tag{18}$$

### 2-4-5-6. Coût des perturbations (F7)

chaque changement de cycle (durée opératoire) sur un poste entraîne une modification de la composition de l'équipe qui lui est affectée ; des perturbations sont ainsi générées selon le sens et l'amplitude de la variation. La diminution d'un cycle n'a pas la même influence sur le coût qu'une augmentation de même amplitude. Pour un poste  $j$  donné, le coût d'un changement de cycle entre deux articles consécutifs aura la forme suivante (où  $\gamma$  est un coefficient pondérateur caractérisant l'importance donnée aux perturbations et  $f$  désigne le coût « local » de la perturbation entre les articles  $i$  et  $i+1$ ) :

$$\text{si } c_{i+1,j} > c_{i,j} \text{ alors } f_{72} = U \cdot \gamma \cdot \chi_j \cdot \left(1 - \frac{c_{i,j}}{c_{i+1,j}}\right), \quad \text{et si } c_{i,j} > c_{i+1,j} \text{ alors } f_7 = U \cdot \gamma \cdot \chi_j \cdot \left(1 - \frac{c_{i+1,j}}{c_{i,j}}\right)$$

$$\text{et nous retiendrons finalement : } F_7 = U \cdot \gamma \cdot \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^n \chi_j \cdot \left(1 - \omega_{i,j} \cdot \frac{c_{i+1,j}}{c_{i,j}} - (1 - \omega_{i,j}) \cdot \frac{c_{i,j}}{c_{i+1,j}}\right) \quad (19)$$

## 2-5. Méthodologie de résolution du problème

### 2-5-1. Choix de la méthode et stratégie de résolution

La modélisation aboutissant à un problème de programmation non-linéaire en variables mixtes, sa résolution nécessite l'utilisation d'un code capable de traiter l'arborescence des solutions, par une méthode de séparation et évaluation. Le problème est tout d'abord traité comme un problème de programmation non-linéaire en variables réelles, qui permet d'obtenir la solution relaxée du problème ; la résolution du problème de programmation non-linéaire à chaque nœud de la procédure de « Branch & Bound » permet de passer progressivement du problème relaxé au problème en variables mixtes. La totalité des calculs ont été effectués avec OPTMIX (code en Fortran utilisable sur PC [30]). Compte tenu de l'organisation et de l'indexation des variables, l'algorithme va procéder comme suit :

- Résolution du problème relaxé (en considérant que toutes les variables sont continues) ;
- Séparation et évaluation des sommets, en commençant par les variables de types  $ae_{i,k}$  puis  $as_{i,j,k}$  puis  $c_{ij}$  et enfin  $\omega_{ij}$  ;
- Obtention d'une solution admissible, retenue comme optimale ou non, selon la valeur de la fonction objectif en ce point ;
- Exploration de l'arborescence tant qu'il reste des sommets non développés et dont l'évaluation est meilleure que la solution optimale courante.

La détermination de l'ordre de séparation et d'évaluation des sommets répond à un impératif de réduction du temps de calcul ; en effet, le chemin total parcouru dans l'arborescence pour atteindre un sommet peut connaître d'importantes différences selon l'ordre retenu. Dans le cas présent, la logique retenue répond aux considérations suivantes :

- Détermination de l'enchaînement des livraisons et de leur affectation aux événements ;
- Détermination de l'ordre des départs de poste, en fonction des livraisons prévues pour la branche de l'arborescence en cours d'exploration ;
- Choix des cycles de production, compatibles avec les décisions d'affectation préalables ;
- Détermination des valeurs des variables  $\omega_{ij}$  d'après les valeurs des  $c_{ij}$  ;
- Détermination de la valeur des variables continues.

**2-5-2. Données de simulation du problème**

La formulation décrite est appliquée à la résolution d'un exemple ; l'atelier étudié est constitué de deux postes de travail, P1 et P2, sur lesquels doivent être traités dix articles, suivant une gamme identique. Chaque article doit d'abord passer sur le poste P1 avant de passer sur le poste P2 ; de plus, chaque poste ne compte qu'une seule position. L'ensemble des pièces devant être intégrées dans l'atelier arrivent dans le stock amont selon un principe « à débit constant » ; le rythme d'arrivée (intervalle entre deux arrivées) est connu *a priori*, mais la date d'arrivée du premier lot dans le stock ( $\delta_{1,1}$ ) est une variable, qui détermine l'arrivée de tous les autres lots. Les valeurs discrètes autorisées pour les cycles des postes P1 et P2 sont au nombre de deux, et sont présentées dans le **Tableau 1** ci-dessous, ainsi que les charges de travail sur chaque poste (en hommes.unités de temps) :

**Tableau 1 : Cycles et charge de travail par poste**

	Poste P1	Poste P2
Cycle minimum (en u. t.) $c_j^{\min}$	6	5
Cycle maximum (en u. t.) $c_j^{\max}$	8	8
Charge de travail (en h. u. t.)	48	60

De plus, l'effectif total disponible sur l'atelier ne peut en aucun cas dépasser 15 opérateurs, qui est donc une borne supérieure pour  $L^{ot}$ . Les intervalles autorisés pour la livraison de chacun des articles sont énumérés dans le **Tableau 2** ci-dessous.

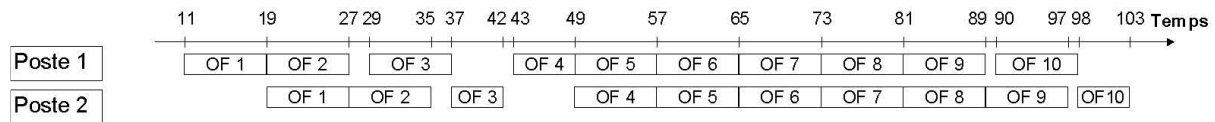
**Tableau 2 : Date de livraison théorique et intervalles de livraison pour chaque article**

<b><i>N° de l'article</i></b>	<b><math>L_i^-</math></b>	<b><math>L_i^0</math></b>	<b><math>L_i^+</math></b>
<b>1</b>	26	28	30
<b>2</b>	35	37	39
<b>3</b>	38	40	42
<b>4</b>	55	57	59
<b>5</b>	65	67	69
<b>6</b>	73	75	77
<b>7</b>	78	80	82
<b>8</b>	87	89	91
<b>9</b>	93	95	97
<b>10</b>	101	103	105

**3. Résultats et Discussion**

La résolution du problème défini ci-dessus à l'aide de la formulation MINLP conduit à l'obtention de la solution optimale représenté sur le diagramme **Figure 5**, obtenue en  $183.10^3$  secondes CPU, soit environ 50 heures (sur un PC équipé d'un microprocesseur P400 MHz).

L'axe des abscisses représente l'échelle des temps, les deux postes considérés sont représentés en ordonnée : on obtient donc le diagramme de Gantt des différents postes.



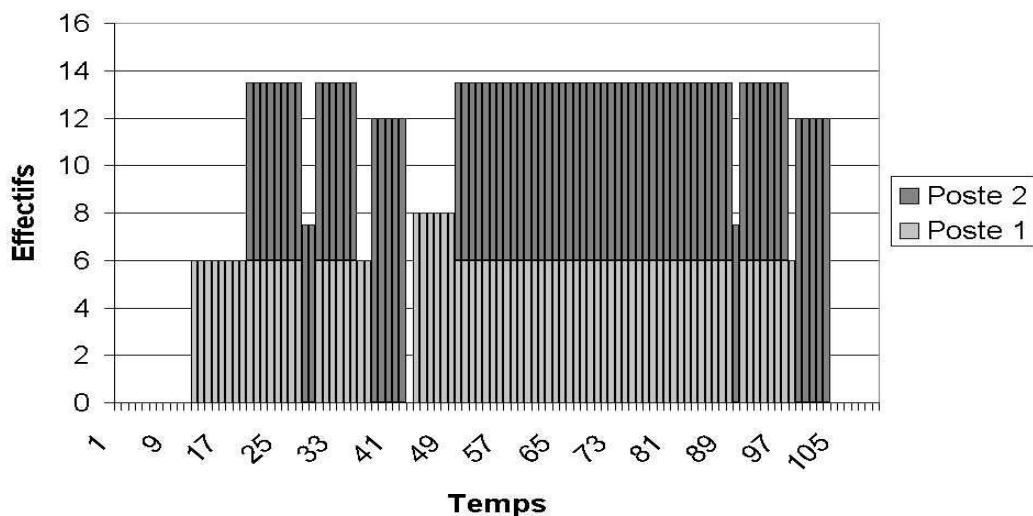
**Figure 1 :** Diagramme de Gantt des postes de la solution optimale

Le **Tableau 5** ci-dessous présente les cycles sur les postes 1 et 2, ainsi que les dates de livraison pour les différents articles :

**Tableau 5 :** Solution optimale (Cycles et dates de livraison)

N° d'article	Cycle Poste 1	Cycle Poste 2	Date de livraison
1	8	8	27
2	8	8	35
3	8	5	42
4	6	8	57
5	8	8	65
6	8	8	73
7	8	8	81
8	8	8	89
9	8	8	97
10	8	5	103

La **Figure 6** constitue le plan de charge des opérateurs par poste associé à la solution optimale ; il représente le nombre d'opérateurs nécessaire sur chaque poste par unité de temps.



**Figure 6 :** Plan de charge de la solution optimale

La fonction coût associée à la solution optimale se décompose comme le **Tableau 6** suivant :

$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$	$F_7$	<b>F</b>
4 080	18 120	0	0	2 224	352	732	<b>25 508</b>

**Tableau 6** : Décomposition de la fonction coût pour la solution optimale

Il est cependant important de noter les remarques suivantes : Les perturbations engendrées par les variations de durées opératoires (inactivité  $F_6$ , et coûts de changements de cycles,  $F_7$ ) ne sont compensées par l'ensemble des gains sur les coûts d'immobilisation que dans le cas de produits dont la valeur est élevée par rapport aux coûts salariaux. De même, le taux d'actualisation des encours  $\tau$  joue un rôle majeur ; si sa valeur est élevée, la réorganisation de la production est aisément justifiable par les gains potentiels sur les frais financiers, alors qu'une valeur faible de  $\tau$  diminuera notablement l'intérêt de telles modifications. Enfin, la répartition temporelle des dates de livraison est primordiale ; si celles-ci sont réparties presque de manière homogène, il est préférable de stocker les produits finis durant de courtes périodes.

#### 4. Conclusion

La description du temps selon un principe de discrétisation non-uniforme permet la modélisation du problème en prenant en compte simultanément l'ensemble des variables de décision. De plus, elle possède un caractère pédagogique sur la présentation du problème et les relations existant entre les variables. La résolution du problème de programmation non linéaire en variables mixtes (MINLP) conduit à la solution optimale ; celle-ci a ainsi pu être comparée à la solution à débit constant, qui ne fait appel à aucun des potentiels de flexibilité. Au regard des critères complémentaires (taux d'utilisation des ressources et taux de variation des effectifs), la solution optimale présente également des caractéristiques satisfaisantes. Cependant, la taille du problème exprimé en variables mixtes sur un exemple de dimensions très modestes, ainsi que le temps nécessaire à la résolution, constituent un obstacle sérieux quant à son utilisation pour un exemple de dimensions industrielles ; il est donc nécessaire d'étudier une autre méthode qui pourra être l'objet d'une autre publication.

#### Références

- [1] - K. H. EDI, "Affectation flexible des ressources dans la planification des activités industrielles : prise en compte de la modulation d'horaires et de la polyvalence", Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier Toulouse (France), (2007).
- [2] - A. EL AWADY, K. H. EDI and P. DUQUENNE, "Flexible resources allocation techniques : characteristics and modelling", Int. J. Operational Research, Vol. 14, No 2 (2012).
- [3] - M. E. SALVESON, "On a quantitative method in production planning and heduling", *Econometrica*, 20 (4) (1952) 554–590.
- [4] - S. M. JOHNSON, "Optimal two- and three-stage production schedules with setup times included", *Naval Research Logistics Quarterly*, 1 (1) (1954) 61-68.

- [5] - H. G. CAMPBELL, R. A. DUDEK and M. L. SMITH, "A heuristic algorithm for the n job, m machine sequencing problem", *Management Science.*, Vol 16 (1970) B630-B637.
- [6] - M. NAWAZ, J. E. E. ENSCORE and I. HAM, "A heuristic algorithm for the m-machine, n-job flowshop sequencing problem", *Omega.*, 11(1) (1983) 91-95.
- [7] - R. LOGENDRAN, S. CARSON and E. HANSON, "Group scheduling in flexible flow shops", *International Journal of Production Economics*, 96 (2) (2005) pp 143-155.
- [8] - G. J. KYPARISIS and C. KOULAMAS, "Flexible flow shop scheduling with uniform parallel machines", *European Journal of Operational Research* 168 (3) (2006) 985–997.
- [9] - R. LINN and W. ZHANG, "Hybrid flow shop scheduling: A survey", *Computers and Industrial Engineering*, 37 (1-2) (1999) 57–61.
- [10] - S. C. CHUNG and D. Y. LIAO, "Scheduling flexible flow shops with no setup effect", *The 1992 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (1992).
- [11] - A. SHAUKAT, "Scheduling in a Flow Shop with Multiple Processors", PhD thesis, University of Houston, (1988).
- [12] - R. L. GRAHAM, E. L. LAWLER, J. K. LENSTRA and A. H. G. RINNOOY KAN, "Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling theory: a survey", *Ann. Discrete Math.*, (1979).
- [13] - A. VIGNIER, J.-C. BILLAUT and C. PROUST, "Les problèmes d'ordonnement de type flow shop hybride : état de l'art", *RAIRO Rech. Oper.* 33:2 (1999) 117-182.
- [14] - E. M. KURZ and R.G. ASKIN, "Scheduling flexible flow lines with sequence dependent set-up times", *European Journal of Operational Research*, Vol 159 (2003) 66–82.
- [15] - T. WAJDI, "Ordonnement des systemes de production flexibles soumis a differents types de contraintes de blocage", *These Universite de Lorraine*, (2012).
- [16] - C. SRISKANDARAJAH and S. P. SETHI, "Scheduling algorithms for flexible flow shops: worst and average case performance", *European Journal of Operational Research.*, Vol 43 (1989) 143-160.
- [17] - M. GAREY, and D. S. JOHNSON, "Two-processor scheduling with start times and deadlines", *SIAM J. Comput.*, 6(1977) 416-426.
- [18] - J. N. D. GUPTA and E. TUNC, "Schedules for the two-stage hybrid flowshop with parallel machines at the second stage", *Int. J. of Prod. Res.*, 29 (1991) 1489-1502.
- [19] - S. A. BRAH and J.L. HUNSUCKER, "Branch and bound algorithm for the flow shop with multiple processors", *Eur J Oper Res.*, 51(1) (1991) 88–99.
- [20] - M. C. PORTMANN, A. VIGNIER, D. DARDILHAC and D. DEZALAY, "Branch and bound crossed with GA to solve hybrid flowshops", *Eur J Oper Res.*, 107(2) (1998) 389–400.
- [21] - O. MOURSLI and Y. POCHE, "Q branch and bound algorithm for the hybrid flowshop", *International Journal of Production Economics*, 64 (2000) P 113-125.
- [22] - T. SAWIK, "Mixed integer programming for scheduling surface mount technology lines", *International Journal of Production Research*, 39 (1) (2001) 3219–3235.
- [23] - L. CHEN and N. BOSTEL, "A tabu search algorithm for the integrated scheduling problem of container handling systems in a maritime terminal", *European Journal of Operational Research*, 181 (1) (2007) 40 - 58.
- [24] - B. WARDONO and Y. FATHI, "A tabu search algorithm for the multistage parallel machines problem with limited buffer capacities", *European Journal of Operational Research*, 155 (2004) 380–401.
- [25] - C. LOW, "Simulated annealing heuristic for flow shop scheduling problems with unrelated parallel machines", *Computers and Operations Research*, 32 (8) (2005) 2013–2025.

- [26] - M. HAOURI, "Heuristic algorithms for the two-stage hybrid flowshop problem", *Operations Research Letters*, 21 (1997) 43 - 53.
- [27] - H. ISHIBUCHI, S. MISAKI and H. TANAKA, "Modified simulated annealing algorithms for the Flow-Shop sequencing problem", *European Journal of Operational Research*, vol 81 (1995) pp 388-399.
- [28] - A. C. IMRAN and K. M. ABDUL, "Minimizing makespan for a no-wait flowshop using genetic algorithm", *Sadhana/Indian Academy of Sciences*, Vol 37 Part 6 (2012)pp 695–707.
- [29] - S. A. TORABI, S. M. T. FATEMI-GHOMI and B. KARIMI, "A hybrid genetic algorithm for the finite horizon economic lot and delivery scheduling in supply chains", *European Journal of Operational Research*, 173(1) (2006) 173–189.
- [30] - J-M. RENEAUME, "Formulation et résolution du problème d'optimisation non-linéaire en variables mixtes dans un environnement modulaire : Application à la synthèse optimale des procédés", Thèse de l'Institut National Polytechnique de Toulouse France, (1995).